

12 塑性構成式（弾塑性・剛塑性）

東京大学生産技術研究所 柳本 潤

1. 弾性構成式

構成式とは、物体内部の応力と、対応して発生する変形との関係式のことである。例えば等方弾性体であれば、良く知られた Hooke の法則が成り立つ。

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + 2G\frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\varepsilon_{kk} = 2G\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl}\right)\varepsilon_{kl} \quad (1)$$

以下に、弾塑性変形を表現し得る構成式について、導出の過程を含め概説を行う¹⁾。なお弾塑性構成式の塑性変形部分は、以下の3つの基本的関係により構成される⁴⁾。

①降伏条件 $f(\boldsymbol{\sigma}) - \bar{\sigma} = 0$

②加工硬化則 $\bar{\sigma} = F(W^P; C), W^P = \int \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ C は材料定数

③流れ則 $d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \mathbf{C}^P d\boldsymbol{\sigma}$ $\mathbf{C}^P$ はコンプライアンステンソル

2. 降伏条件と降伏関数・降伏曲面・硬化則

2.1 降伏条件と降伏関数

Mises の降伏条件は、以下の関係式(2)で表現できる。

$$3I_2' - \bar{\sigma}^2 = 0 \quad (2)$$

ここで $\bar{\sigma}$ は加工硬化を含む一般化された降伏応力のことで相当応力(Equivalent stress)と呼ばれる。式(2)は応力の二次の式になっている。

偏差応力 $\boldsymbol{\sigma}'$ の第2不変量 I_2' は $I_2' = \frac{1}{2}\sigma_{ij}'\sigma_{ij}'$ なる関係を満足する。式(2)を図示すると、主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を直交三軸とする主応力空間において、 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ が $(1,1,1)$ 方向を軸とする円筒面を構成する。これを降伏曲面と呼ぶ。円筒の軸は $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma_m$ であり、降伏曲面の軸は $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma_m$ に無関係であること、つまり静水圧応力 σ_m に応力が依存しないことに対応している。円筒の軸は $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma_m$ に直交する平面と降伏条件式(2)の交線は円になる。軸は $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma_m$ に直交する平面を π 平面と呼ぶ。この π 平面では円として降伏条件が表現されている。これは降伏曲面の2次元表示であり、塑性論ではしばしばこちらの表示を利用する。

ここで式(2)を因数分解すると、

$$\left(\sqrt{3I_2'} - \bar{\sigma}\right)\left(\sqrt{3I_2'} + \bar{\sigma}\right) = 0$$

であるが左辺の2個目の括弧の中は常に正の値を取るため、降伏条件式(2)は次式(4)と

必要十分な関係にある。

$$f(\boldsymbol{\sigma}) - \bar{\sigma} = 0 \quad \text{where} \quad f(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{3I_2'} \quad (3)$$

この式(4)は Mises の降伏条件の別表示、応力の一次の式になっている。降伏関数と呼ばれることがある。以後、一次の降伏関数を $f(\boldsymbol{\sigma})$ で表す。二次の降伏関数を $F(\boldsymbol{\sigma})$ とすると、式(2)を以下の通りに表すことができる。

$$F(\boldsymbol{\sigma}) - \bar{\sigma}^2 = 0 \quad \text{where} \quad F(\boldsymbol{\sigma}) = 3I_2' \quad (2-2)$$

2.2 硬化則

$\bar{\sigma}$ は加工硬化を含む一般化された降伏応力であった。この加工硬化の程度は、等方性材料については一軸応力場のもとで、同じ材料を同じ環境条件で試験することにより得ることができる（引張試験のこと）。この引張試験などの材料試験の結果により、得られた材料の加工硬化特性は、

$$\bar{\sigma} = \sigma_Y + F \left(\bar{\varepsilon} - \frac{\sigma_Y}{E} \right)^n \quad (4)$$

と表す。ここで、 σ_Y, F, n は材料定数である。

式(4)の左辺 $\bar{\sigma}$ （加工硬化を含む一般化された降伏応力のことで相当応力(Equivalent stress)と呼ばれる）は降伏曲面の半径に対応しており、塑性変形の進行に伴い値が増加し、つまり降伏曲面は大きくなる。

一方で、式(4)は引張試験（材料試験）で与えられる真ひずみ $\bar{\varepsilon}$ の関数であるが、これと（塑性）ひずみ増分の成分 $d\varepsilon_{ij}^P$ の関係を知っておく必要がある。まず、

$$\bar{\varepsilon}^P = \int d\bar{\varepsilon}^P \quad (4-2)$$

である。 $d\bar{\varepsilon}^P$ と $d\varepsilon_{ij}^P$ の関係性については、数学的要件である座標系不依存則などを満足している範囲であれば任意性がある。式(2)と同じ形式を利用することが自然であり、その後の理論の展開も容易になるので、

$$d\bar{\varepsilon}^P \equiv \sqrt{\frac{2}{3}} d\varepsilon_{ij}^P d\varepsilon_{ij}^P \quad (4-3)$$

と決める。これを相当塑性ひずみ増分と呼ぶ。係数は、一軸の試験での引張方向のひずみ増分が、相当塑性ひずみ増分 $d\bar{\varepsilon}^P$ と一致するように定められている。なお $d\bar{\varepsilon}^P$ は塑性変形分であるので式(4)の右辺の $\left(\bar{\varepsilon} - \frac{\sigma_Y}{E} \right)$ に対応していると理解することができるが、

$d\bar{\varepsilon}^P$ が弾性分と塑性分に加算分解できるとわけでもないのに、理論的なあいまいさを回避するため、 $d\bar{\varepsilon}^P$ の積分である相当塑性ひずみ $\bar{\varepsilon}^P$ を、 $\bar{\varepsilon}$ と同一視して式(4)に代入することで構わない。特に塑性変形が十分大きい場合には、この考えで問題ない。

3. 流れ則と塑性ポテンシャルと法線則

3. 1 等方性材料の関連流れ則

塑性変形は大変形であるため配置の変化が大きく、変形を評価するためには増分形の取り扱いをせねばならない。応力状態に対応した塑性ひずみ増分は、塑性変形に寄与する応力である偏差応力 σ' に応じて生じる。つまり、塑性ひずみ増分 $d\epsilon^P$ は偏差応力 σ' と比例すると考えてよく、以下の Reuss の式が成立する（Saint Venant の仮説：ひずみ増分と応力は共軸、(1870)、ただしこの共軸性は異方性構成式では成立していない）。

$$d\epsilon_{ij}^P = \sigma'_{ij} d\lambda \quad (5)$$

以後にこの Reuss の式を、塑性ポテンシャルを用いた一般的な形式に拡張する。
降伏関数（一次の形式） $f(I'_2, \sigma) = 0$ の中立変化は、

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = \frac{\partial f}{\partial I'_2} dI'_2 = 0 \quad (5-2)$$

である。 $d\epsilon_{ij}^P$ は応力の中立変化に対して $d\bar{\epsilon}^P \equiv \sqrt{\frac{2}{3} d\epsilon_{ij}^P d\epsilon_{ij}^P} = 0$ を満足せねばならない。そのためには、 $d\epsilon_{ij}^P = 0$ である必要がある。そこで、対称テンソルの成分 G_{ij} と降伏関数の増分 df を用いて以下の式が成立するものとする。ここで、塑性ひずみ増分 $d\epsilon_{ij}^P$ と降伏関数 $f(\sigma)$ を関連づける。

$$d\epsilon_{ij}^P = G_{ij} df \quad (5-3)$$

対称テンソルの成分 G_{ij} は、1)体積一定条件より $G_{kk} = 0$ であり、かつ、2) $\mathbf{G}$ と $d\epsilon^P$ の主軸は一致するので、等方性であるならば $\mathbf{G}$ と σ の主軸は一致する。ちなみに、 $\det(\sigma_{ij} - S\delta_{ij}) = \det(\sigma'_{ij} - (S - \sigma_m)\delta_{ij})$ であるから、 σ と σ' の主軸は一致している。

このことは、

$$G_{ij} = h \frac{\partial g(\sigma)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5-4)$$

と置くことで十分に満足できる。 $g(\sigma)$ はHillにより導入された塑性ポテンシャルであり、これにより式(5)を一般化すれば、次式(6)が導かれる¹。ただし、 $hdf = d\lambda'$ である。

¹ 塑性ひずみ増分 $d\epsilon^P$ は塑性ポテンシャル g の勾配であり、 g が一定の線と直交する。証明は、Normality についてのそれと同じである。

$$d\varepsilon_{ij}^p = h \frac{\partial g(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_{ij}} df = \frac{\partial g(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda' \quad (6)$$

$g(\boldsymbol{\sigma}) \neq f(\boldsymbol{\sigma})$ とした取り扱い、金属材料の場合では、異方性を取り扱う場合や、等方性材料であっても分岐現象すなわち塑性不安定現象を解析したい場合に利用される²。
等方性金属材料を扱う範囲では、 $g(\boldsymbol{\sigma}) = f(\boldsymbol{\sigma})$ とした「関連流れ則 (Associated flow rule)」を前提として物事を考えて差し支えない。

以後、塑性ポテンシャル $g(\boldsymbol{\sigma})$ は $f(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{3I_2'} = \sqrt{\frac{3}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}}$ に等しいと考える。この場合に式(6)の偏微分項を計算すると以下の式(7)が得られ、 $f(\boldsymbol{\sigma})$ の全微分は式(8)で表される。以下、 $f(\boldsymbol{\sigma})$ を単に f と表記する。

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{kl}} \frac{\partial \sigma'_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}}} \frac{3}{2}(2\sigma'_{ij}) = \frac{3}{2} \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma} \quad (7)$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \quad (8)$$

3. 2 法線則

降伏曲面に沿った応力変化を仮定すると、 $df = 0$ となるがこれは、この様な応力変化では加工硬化が進まないことに対応している。 $df = 0$ である等ポテンシャル面の上の応力点の上で降伏曲面に沿った応力増分 $d\boldsymbol{\sigma}^*$ を考えると、式(8)と $df = 0$ であることより、 $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ と $d\boldsymbol{\sigma}_{ij}^*$ の内積は零となっている³。

² Mohr-Coulomb 型、Drucker-Prager 型等の非関連流れ則が土質力学で利用される。これは、摩擦材料（地盤）や静水圧依存性材料における過大な体積変化（dilatancy）を抑制するため、非関連流れ則が必須であるためである。

³ $d\boldsymbol{\sigma}_{ij}^*$ はあくまでも塑性ポテンシャル曲面の接ベクトルとして導入されており、これが中立変化かどうかは無関係に定義することができる（非関連流れ則の場合には要注意）。 $d\boldsymbol{\sigma}_{ij}^*$ が中立変化に対応する応力増分であると主張するには、これが降伏曲面の接ベクトルであることを示さなければならない。

後藤先生の教科書では式(8-2)と Drucker の安定硬化仮説(10) をその根拠にしているが、 $d\boldsymbol{\sigma}_{ij}^*$ はそれとは無関係に導入された塑性ポテンシャル曲面の接ベクトルであり、 $d\varepsilon_{ij}$ を生み出した応力増分とは異なり、Drucker の安定硬化仮説を満たす必要はない。見方を変えると、あらかじめ降伏関数に相似な塑性ポテンシャル関数を導入しなければこの結論は得られない。実際、等方性であっても例えば降伏関数に Mises、塑性ポテンシャル関数にトレスカを採用することも可能で、その場合には塑性ポテンシャル曲面の接ベクトル $d\boldsymbol{\sigma}_{ij}^*$ と降伏関数の接ベクトル $d\boldsymbol{\sigma}_{ij}$ は異なり、かつ Drucker の安定硬化仮説を満たすことができる。塑性ポテンシャル関数はひずみ増分の方を決めるだけがそのミッションであり、除荷負荷の判断や硬化特性は降伏曲面とその発展形のみで表現されなければならない。

また、Hill の教科書第3章の冒頭では、“塑性ポテンシャル関数は降伏関数と関係がありそうだが、

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}^* = 0 \quad (8-2)$$

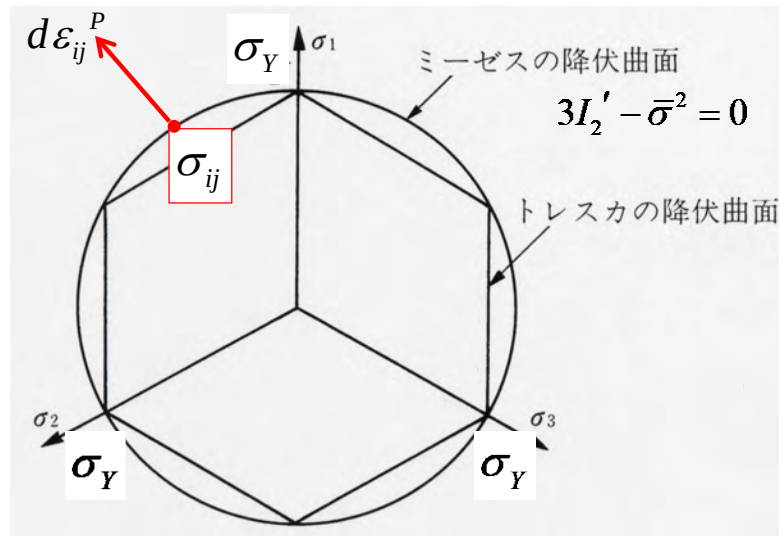
つまり、関連流れ則である場合には、降伏曲面と応力増分は直交する。

式(6)より $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ は塑性ひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}^P$ に並行 ($\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \propto d\varepsilon_{ij}^P$) である。従って材料に発生する塑性ひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}^P$ は、その時点での応力状態に対応する降伏曲面上 $f(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{3I_2'} = \sqrt{\frac{3}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}}$ の点において、降伏曲面外向き法線ベクトル方向を向く。すなわち 法線則 (式(9)) が成り立つ。

$$d\varepsilon_{ij}^P d\sigma_{ij}^* = 0 \quad (9)$$

ちなみに加工硬化状態にある場合の応力増分 $d\boldsymbol{\sigma}$ と塑性歪増分 $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ の間には、式(10)に示した **Drucker** の硬化仮説が成立しており、この式が **Reuss** の式(5)を導出する際の出発点になっている。これは $d\boldsymbol{\sigma}':d\boldsymbol{\varepsilon}^P > 0$ と直接表記することもできる。

$$d\varepsilon_{ij}^P d\sigma_{ij} > 0 \quad (10)$$



$$\begin{aligned} I_2' &= \frac{1}{6} \{ (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 \\ &\quad + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) \} \\ &= \frac{1}{6} \{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \} = C_M^2 \end{aligned} \quad (3.41)$$

図1 降伏曲面

理論的どのような関係でなければならないということとはどの特殊な金属に対しても知られていない。しかしながら、 $f = g$ という簡単な仮定をすると変分原理や唯一定理が公式化されるのでこの仮定は数学的塑性論においては特別な意義を有している”と述べている(伊藤先生より、2019年12月17日)。

4. 剛塑性構成式

式(6)で $g(\boldsymbol{\sigma}) = f(\boldsymbol{\sigma})$ とし、

$$d\varepsilon_{ij}^P = \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda' \quad (6)$$

これに式(7)の結果

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{kl}} \frac{\partial \sigma'_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{kl} \sigma'_{kl}}} \frac{3}{2} (2\sigma'_{ij}) = \frac{3}{2} \frac{\sigma'_{ij}}{\bar{\sigma}} \quad (7)$$

を代入すると、次式が得られる。

$$d\varepsilon_{ij}^P = \frac{3}{2\bar{\sigma}} \sigma'_{ij} d\lambda' \quad (11)$$

式(11)より $d\varepsilon_{ij}^P d\varepsilon_{ij}^P$ を計算してみると、次式が得られる。

$$d\varepsilon_{ij}^P d\varepsilon_{ij}^P = \frac{9}{4} \frac{1}{\bar{\sigma}^2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} (d\lambda')^2 \quad (12)$$

ここで式(4)より $\bar{\sigma}^2 = 3I_2' = \frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}$ であるので結局、

$$d\lambda' = \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^P d\varepsilon_{ij}^P} = d\bar{\varepsilon}^P \quad (13)$$

であることが証明できる。式(13)を式(11)に代入すれば、Levy-Mises の式が得られる。

$$d\varepsilon_{ij}^P = \frac{3d\bar{\varepsilon}^P}{2\bar{\sigma}} \sigma'_{ij} \quad (14)$$

なお式(14)は塑性ポテンシャルからの導き出した結果である。剛塑性体 ($d\bar{\varepsilon}^P \simeq d\bar{\varepsilon}$) については、以下の表現が利用できる。

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{3d\bar{\varepsilon}}{2\bar{\sigma}} \sigma'_{ij} \quad (14-2)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3\dot{\bar{\varepsilon}}}{2\bar{\sigma}} \sigma'_{ij} \quad (14-3)$$

式(5)の Reuss の式からの導出も容易にできる。式(5)

$$d\varepsilon_{ij}^P = \sigma'_{ij} d\lambda \quad (5)$$

の両辺の内積を取ると、

$$\frac{3}{2} (d\bar{\varepsilon}^P)^2 = d\varepsilon_{ij}^P d\varepsilon_{ij}^P = \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} d\lambda^2 = \frac{2}{3} \bar{\sigma}^2 d\lambda^2 \quad (15)$$

であるので、 $d\lambda = \frac{3d\bar{\varepsilon}^P}{2\bar{\sigma}}$ となり、これを式(5)に代入すると、

$$d\varepsilon_{ij}^P = \sigma'_{ij} \frac{3d\bar{\varepsilon}^P}{2\bar{\sigma}}$$

となり、式(14)と一致する結果が得られる。つまり、関連流れ則 $g(\boldsymbol{\sigma}) = f(\boldsymbol{\sigma})$ である場合、Hill による塑性ポテンシャルを利用した構成式の表現(14)式は、Reuss の式(5)と一致する。

5. 弾塑性構成式の一般形

一軸材料試験の結果得られる相当応力 $\bar{\sigma}$ と相当塑性ひずみ $\bar{\varepsilon}^P$ の関係の微分によって、式(16)が得られる。 H' は塑性係数と呼ばれており、応力～ひずみ線図（正しくは相当塑性ひずみ $\bar{\varepsilon}^P$ ）の勾配である。

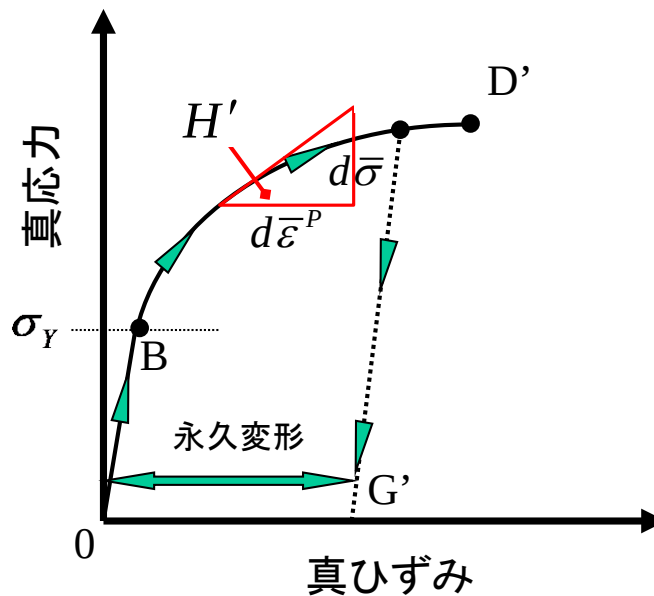


図2 塑性係数 H'

$$d\bar{\sigma} = H' d\bar{\varepsilon}^P = H' d\lambda' \quad (16)$$

右辺の導出には、式(13) $d\bar{\varepsilon}^P = d\lambda'$ を参照している。なお、 $d\lambda' = h df$ である。
式(4) $f(\boldsymbol{\sigma}) - \bar{\sigma} = 0$ の全微分により $d\bar{\sigma} = df$ でありここに式(8)

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = d\bar{\sigma}$$

を代入すると式(17)が得られる。

$$d\lambda' = d\bar{\varepsilon}^P = \frac{d\bar{\sigma}}{H'} = \frac{1}{H'} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \quad (17)$$

式(7)

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{kl}} \frac{\partial \sigma'_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{kl} \sigma'_{kl}}} \frac{3}{2} (2\sigma'_{ij}) = \frac{3}{2} \frac{\sigma'_{ij}}{\bar{\sigma}}$$

を式(17)に代入して整理すると式(18)

$$d\lambda' = d\bar{\varepsilon}^P = \frac{d\bar{\sigma}}{H'} = \frac{1}{H'} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = \frac{1}{H'} \frac{3\sigma'_{ij}}{2\bar{\sigma}} d\sigma_{ij} \quad (18)$$

が得られる。式(18)のダミー指標 ij を kl に入れ替え、Levy-Mises の式(14)

$$d\varepsilon_{ij}^P = \frac{3d\bar{\varepsilon}^P}{2\bar{\sigma}} \sigma'_{ij} \quad (14)$$

に代入して $d\bar{\varepsilon}^P (= d\lambda')$ を消去すると、相当塑性ひずみ増分と応力増分の関係式が得られる。つまり、偏差応力ではなく、応力増分を利用した形で Levy-Mises の式を表現できる。

$$d\varepsilon_{ij}^P = \frac{9}{4H'} \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{\bar{\sigma}^2} d\sigma_{kl} \quad (19)$$

式(19)は塑性ひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}^P$ と応力増分 $d\sigma_{ij}$ との関係式を与えている。式(19)の右辺の係数は塑性コンプライアンステンソルの成分 C_{ijkl}^P である。

$$C_{ijkl}^P = \frac{9}{4H'} \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{\bar{\sigma}^2} \quad (19-2)$$

コンプライアンステンソルは正則(Regular)ではなく非正則(Singular)で、そのままでは逆を取ることができない。このことは、式(19)が、塑性ひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}^P$ が現在の応力 σ'_{ij} とテンソル的に対応しており σ'_{ij} によってその方向が決まってしまうことに起因している。つまり $d\varepsilon_{ij}^P$ の方向は後続の応力増分 $d\sigma_{kl}$ とは無関係である⁴⁾。

ところが弾性ひずみ成分を式(19)に加えることで正則とすることができるので、以下

の式変形を行う。全ひずみ増分は、変形勾配 $\mathbf{F}$ の弾塑性分解を基点として式変形を行うことにより求められる²⁾。まず、変形勾配の弾塑性分解式の物質時間微分を取る。

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}} = \mathbf{F}^E \mathbf{F}^P \quad (20)$$

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{F}}^E \mathbf{F}^P + \mathbf{F}^E \dot{\mathbf{F}}^P \quad (21)$$

速度勾配と変形勾配との関係は以下の通りである。

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \quad (22)$$

式(11)、式(12)を式(13)に代入すると、次式が得られる。

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} = (\dot{\mathbf{F}}^E \mathbf{F}^P + \mathbf{F}^E \dot{\mathbf{F}}^P) \mathbf{F}^{-P} \mathbf{F}^{-E} = \dot{\mathbf{F}}^E \mathbf{F}^{-E} + \mathbf{F}^E \dot{\mathbf{F}}^P \mathbf{F}^{-P} \mathbf{F}^{-E} \quad (23)$$

すなわち、

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} = \mathbf{L}^E + \mathbf{F}^E \mathbf{L}^P \mathbf{F}^{-E} \quad (24)$$

である。ところで弾性変形成分は微小であるので、 $\mathbf{F}^E \approx \mathbf{I}$ と近似すると、速度勾配・変形速度（ストレッチング）・回転速度の弾塑性分解式が得られる。

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} = \mathbf{L}^E + \mathbf{L}^P = (\mathbf{D}^E + \mathbf{D}^P) + (\mathbf{W}^E + \mathbf{W}^P) \quad (25)$$

従って、 $\mathbf{D} = \mathbf{D}^E + \mathbf{D}^P$ より、

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^E + d\varepsilon_{ij}^P \quad (26)$$

の通り、ひずみ増分について加算分解が成立する。従って、式(26)に、式(1)を増分形表示し逆変換した式と、式(19)を代入すれば、弾塑性構成式が得られる¹⁾。結果を記すと、以下の通りとなる。

$$d\sigma_{ij} = 2G \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} - \alpha \frac{9G\sigma'_{ij}\sigma'_{kl}}{2\bar{\sigma}^2(H'+3G)} \right) d\varepsilon_{kl} \quad (27)$$

$\alpha = 1$ の時には弾塑性変形状態、 $\alpha = 0$ の時には弾性変形状態を表す。式(27)の右辺括弧内第3項は、塑性変形にともなう見かけ上の「弾性変形と比較した軟化」を表している。

この式の括弧の中の第1項第2項は全ひずみ増分に対応した応力、第3項は塑性変形分を表している。つまり式(27)は全ひずみ増分より塑性ひずみ増分を減じた、わずかに残存する弾性ひずみ増分より応力を決めている。このことは、弾塑性構成式の塑性ひずみ増分（式(19)）を規定するコンプライアンスは非正則であるが、Hookeの法則による弾性成分を入れることで、全ひずみ増分を与える関係式とすると正則になることに起因している。そのため、桁落ちなどの危険性をはらんでいることにも注意すべきである。

6. 弾塑性構成式（平面ひずみ変形および軸対称変形の場合）

弾塑性構成式(27)をマトリックス表示することで、次式(28)を得る。

$$\{d\sigma\} = \begin{Bmatrix} d\sigma_{xx} \\ d\sigma_{yy} \\ d\sigma_{zz} \\ d\sigma_{xy} \\ d\sigma_{yz} \\ d\sigma_{zx} \end{Bmatrix} = [D^P] \{d\varepsilon\} = [D^P] \begin{Bmatrix} d\varepsilon_{xx} \\ d\varepsilon_{yy} \\ d\varepsilon_{zz} \\ 2d\varepsilon_{xy} \\ 2d\varepsilon_{yz} \\ 2d\varepsilon_{zx} \end{Bmatrix}$$

$$[D^E] = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(SYM)

$$[D^P] = [D^E] - \alpha \frac{9G^2}{S_0} \begin{bmatrix} \sigma'_{xx}{}^2 & \sigma'_{xx}\sigma'_{yy} & \sigma'_{xx}\sigma'_{zz} & \sigma'_{xx}\sigma'_{xy} & \sigma'_{xx}\sigma'_{yz} & \sigma'_{xx}\sigma'_{zx} \\ & \sigma'_{yy}{}^2 & \sigma'_{yy}\sigma'_{zz} & \sigma'_{yy}\sigma'_{xy} & \sigma'_{yy}\sigma'_{yz} & \sigma'_{yy}\sigma'_{zx} \\ & & \sigma'_{zz}{}^2 & \sigma'_{zz}\sigma'_{xy} & \sigma'_{zz}\sigma'_{yz} & \sigma'_{zz}\sigma'_{zx} \\ & & & \sigma'_{xy}{}^2 & \sigma'_{xy}\sigma'_{yz} & \sigma'_{xy}\sigma'_{zx} \\ & & & & \sigma'_{yz}{}^2 & \sigma'_{yz}\sigma'_{zx} \\ & & & & & \sigma'_{zx}{}^2 \end{bmatrix}$$

(SYM)

$$S_0 = \bar{\sigma}^2 (H' + 3G) = \bar{\sigma}^2 \left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}^P} + 3G \right)$$

平面ひずみ変形に対する応力増分とひずみ増分は、マトリックス形式を利用して以下の通りに表される。

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_{xx} \\ d\sigma_{yy} \\ d\sigma_{zz} \\ d\sigma_{xy} \end{Bmatrix} = 2G \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \alpha \frac{9G}{S_0} \begin{bmatrix} \sigma'_{xx}{}^2 & \sigma'_{xx}\sigma'_{yy} & 2\sigma'_{xx}\sigma'_{xy} \\ \sigma'_{xx}\sigma'_{yy} & \sigma'_{yy}{}^2 & 2\sigma'_{yy}\sigma'_{xy} \\ \sigma'_{xx}\sigma'_{zz} & \sigma'_{yy}\sigma'_{zz} & 2\sigma'_{zz}\sigma'_{xy} \\ \sigma'_{xx}\sigma'_{xy} & \sigma'_{yy}\sigma'_{xy} & 2\sigma'_{xy}{}^2 \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_{xx} \\ d\varepsilon_{yy} \\ d\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

(29)

$$\text{ただし } S_0 = 2\bar{\sigma}^2 (H' + 3G) = 2\bar{\sigma}^2 \left(\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}^P} + 3G \right)$$

軸対称変形についての応力増分とひずみ増分は、マトリックス形式を利用して以下の通りに表される。

$$\{d\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} d\varepsilon_{rr} \\ d\varepsilon_{zz} \\ d\varepsilon_{rz} \\ d\varepsilon_{\theta\theta} \end{Bmatrix}, \{d\sigma\} = \begin{Bmatrix} d\sigma_{rr} \\ d\sigma_{zz} \\ d\sigma_{rz} \\ d\sigma_{\theta\theta} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

軸の直交性を考慮することで、以下の構成マトリックスを得る。

【以後未完成につき空白】

参考文献

- 1) 日本塑性加工学会編：非線形有限要素法(1994)、コロナ社
- 2) 北川：弾・塑性力学(1987)、裳華房
- 3) 後藤：塑性学(1982)、コロナ社
- 4) 伊藤：塑性構成式研究会資料（2012-2）