

# 圧延理論一 1 (圧延概論・Karman の理論)

東京大学生産技術研究所 柳本 潤

## 1. 圧延理論とその歴史

圧延理論は、Karman (カルマン) が1925年に提示した基礎微分方程式に始まり、爾来75年が経過した今日に至るまで、圧延プロセス技術の開発に大きな役割を果たしてきた。一言で圧延理論といってもその内容は多岐に亘っており、現在では多様な圧延理論を用途に応じて使い分けることが従来にも増して重要となっている。図1は、初等解析法に基づく古典圧延理論と、現在多用されている有限要素法に基づく現代圧延理論の発展の歴史を比較して示したものである。

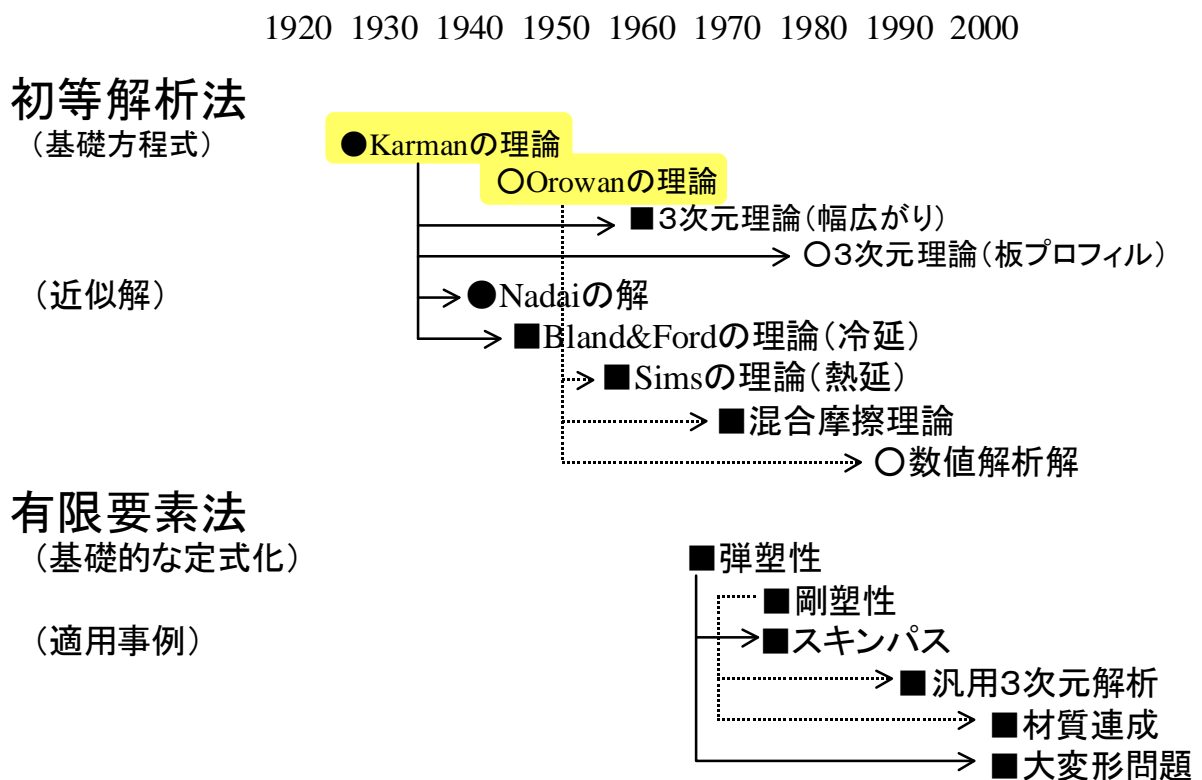


図1 圧延理論の歴史 (●は初級、○は中級でふれるもの、■は参考文献を提示する)

初等解析法に基づく古典圧延理論は、古典的とは言え現在でも圧延負荷・トルク・先進率の算定に重要な役割を担っている。古典圧延理論は、Karman による被圧延材内部の応力が満足すべき釣合い方程式の提示により始まり (1925) <sup>1)</sup>、種々の近似解析法に関連する研究を経て、Nadai による解の提示 (1939) <sup>2)</sup>、あるいは Bland&Ford の冷間圧延理論 (1948) <sup>3)</sup>へと発展した。加えて、古典圧延理論で重要な位置を占めているのが、Orowan による釣合い方程式の提示 (1943) <sup>4)</sup>に始まる一連の圧延理論であり、こ

れには Sims の熱間圧延理論 (1954) <sup>5)</sup>、混合摩擦理論 (1970) <sup>6)</sup>等が含まれる。

一方、現在では数値解析により圧延の解析を行うことがごく一般的に行われている。そのために利用されているのが有限要素法 (FEM) であるが、被圧延材の弾性変形を無視した剛塑性理論に基づく熱間圧延解析は 1990 年代より急速に進展した <sup>7)</sup>。現在では、オーステナイト領域での再結晶による組織変化の解析手法・温度解析手法 <sup>8),9)</sup>との連成が行われ <sup>10)</sup>、材料/プロセス技術の高度な融合による次世代圧延技術開発への展開が期待されている。一方冷間圧延については、被圧延材の弾性変形をも解析し得る最も高度な圧延理論である、弾塑性有限要素法によるスキンプラス圧延の解析 (1975) <sup>11)</sup>以後長い空白があったが、最近改めて大変形弾塑性 FEM の適用が試行されている <sup>12)</sup>。ただし、現在では有限要素法による圧延解析が一般的になりつつあるとは言っても、圧延加工中の被加工材が示す力学的特性の理解や、AGC などの基礎となるオンライン負荷特性予測モデルの構築には、初等解析法に基づく古典圧延理論の方が遙かに優れており、材料・圧延技術者は、古典圧延理論を学習する努力を怠ってはならない。

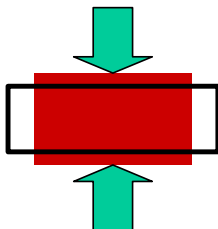
## 2. 圧延理論の分類

前章においてふれた各種圧延理論を、特性・用途別に再度分類してみる。

### 2.1. 2次元理論

Karman<sup>1)</sup>、Orowan<sup>4)</sup>に始まる一連の古典圧延理論は、1970 年代以前には電子計算機の利用が一般的では無かったため、「単純な理論による大まかな変形・負荷特性の解明を精度良く行う」ことを指向せざるを得ない状況にあった。逆に当時は、現在行われている様な電子計算機による力ずくの数値解析が不可能であったため、結果として生み出された古典理論体系には数多くの欧米の研究者の英知が結集されている。幸いにして、板幅/板厚が 10 を超える範囲、すなわち通常薄板・厚板圧延条件では、板幅方向に発生する変形が小さいためこれを無視し (図2参照)、板厚方向一圧延方向断面の上下ロールに挟まれている領域を「変形域」と想定し、板厚方向圧下/圧延方向延伸に伴う変形域の応力分布の解明を行うことが目的とされた。

狭幅→幅広がり大



広幅→幅広がり小

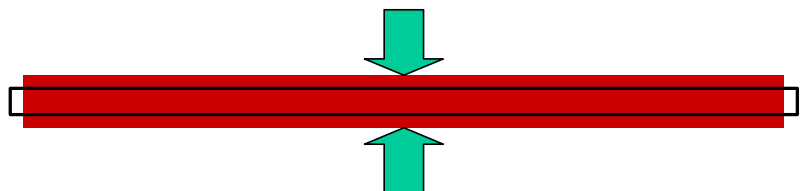


図2 板幅/板厚比と幅広がりの関係

このような理論を、圧延 (RD)、板厚 (ND) の2つの方向により規定される2次元平面内での変形を対象とするという意味で、2次元圧延理論と呼ぶ (図3参照)。

2次元圧延理論により計算されるのは、

- 1) 被圧延材内部のL断面内応力分布、
- 2) ワークロールに被圧延材から作用する圧延圧力分布、すなわち圧延荷重、
- 3) 中立点位置および先進率、

であり、そのための入力条件は、

- a) 入側板厚および出側板厚、
- b) ワークロール直径、
- c) 降伏応力、
- d) まさつ係数、
- e) 前後方張力、

等の圧延プロセス条件と材料条件である。2次元圧延理論では既に述べた通り、被圧延材の幅方向の変形すなわち幅広がりを見逃しているため、板幅/板厚が10を超える範囲、すなわち通常の薄板・厚板圧延条件での「圧延圧力分布」「単位幅あたりの圧延荷重」が求まる。また、圧延においては必ず発生する、ワークロールの扁平変形を考慮した解析も、容易に行うことができる。さらに、初等解析法による2次元圧延理論 (Orowanの理論) でも電子計算機による数値解析 (図1参照) <sup>13)</sup>を行うことにより、剛塑性有限要素法に匹敵する精度で計算が実施できることがわかっている。

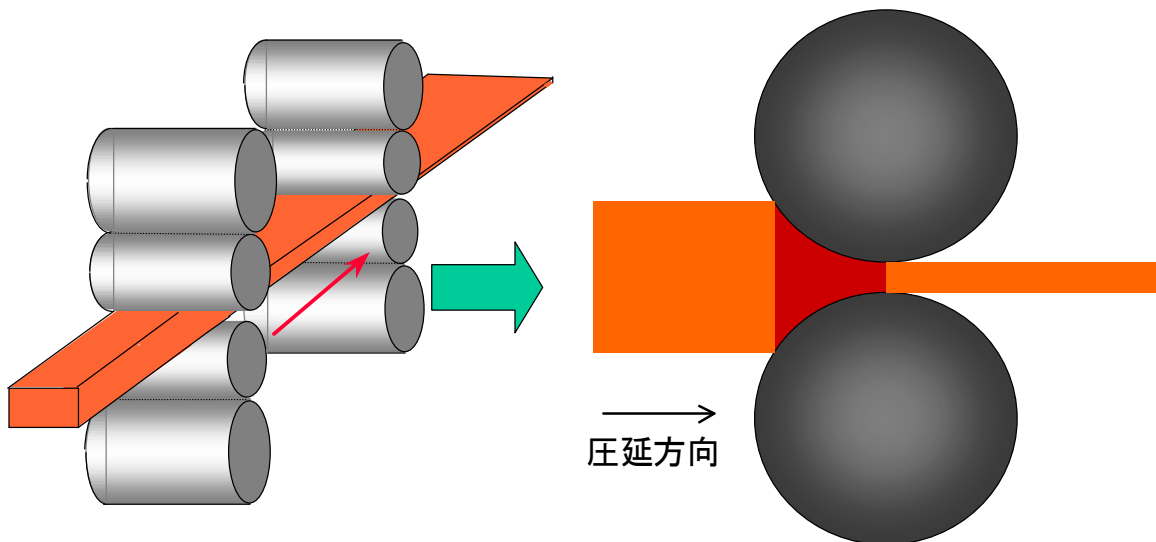


図3 2次元圧延理論で想定する変形と解析領域

## 2.2. 3次元圧延理論

条鋼 (棒鋼、線材、形鋼) の圧延では、被圧延材幅方向の変形を見逃した2次元圧延理論を適用することが出来ない。なぜなら、2次元圧延理論では被圧延材のC断面 (圧

延方向に垂直な横断面) 内での変形が無視されているため、減面率やカリバーへの充填などの変形特性や、これに対応した負荷特性の解明には無力であるからである。これらの圧延プロセス、さらに帯鋼の圧延の様に板幅/板厚が10を下回る範囲では3次元圧延理論を適用しなければならない。

加えて、薄板圧延・厚板圧延でも、被圧延材とワークロール接触面で発生するロール扁平変形や、ワークロール・バックアップロールのたわみが板幅方向に分布を持つため、これに起因する板幅方向板プロフィール(板厚分布)の解明にはやはり3次元圧延理論を利用せざるを得ない。

初等解析法に基づく3次元圧延理論は、板幅/板厚が10を下回る範囲での幅広がり(1961)<sup>14)</sup>に始まる条鋼系への適用を想定したものと、ロールの変形を含めた板プロフィール解析を想定したもの(1968)<sup>18)</sup>・(1982)<sup>15)</sup>の、2系列が存在する。現在の有限要素法による汎用3次元解析(図1参照)では、これらは同一プログラムの中で一元的に取り扱うことができる。

### 3. 圧延プロセスを特徴づけるパラメータ

板厚方向/圧延方向断面について見た場合、圧延プロセスをまず特徴づけるのは、入側板厚・出側板厚・ロール半径・ロールの回転角速度等の幾何学的要因である。2次元圧延理論では、これらの幾何学的要因に材料側の要因である材料の変形抵抗やロール材料界面の摩擦条件を加えた圧延プロセス条件(もしくは単に圧延条件)より、圧延加工中の変形・負荷特性を算出することができる。本章では、以後圧延理論の説明を進めるに当たり必要となる、パラメータの説明を行う(図4参照)。

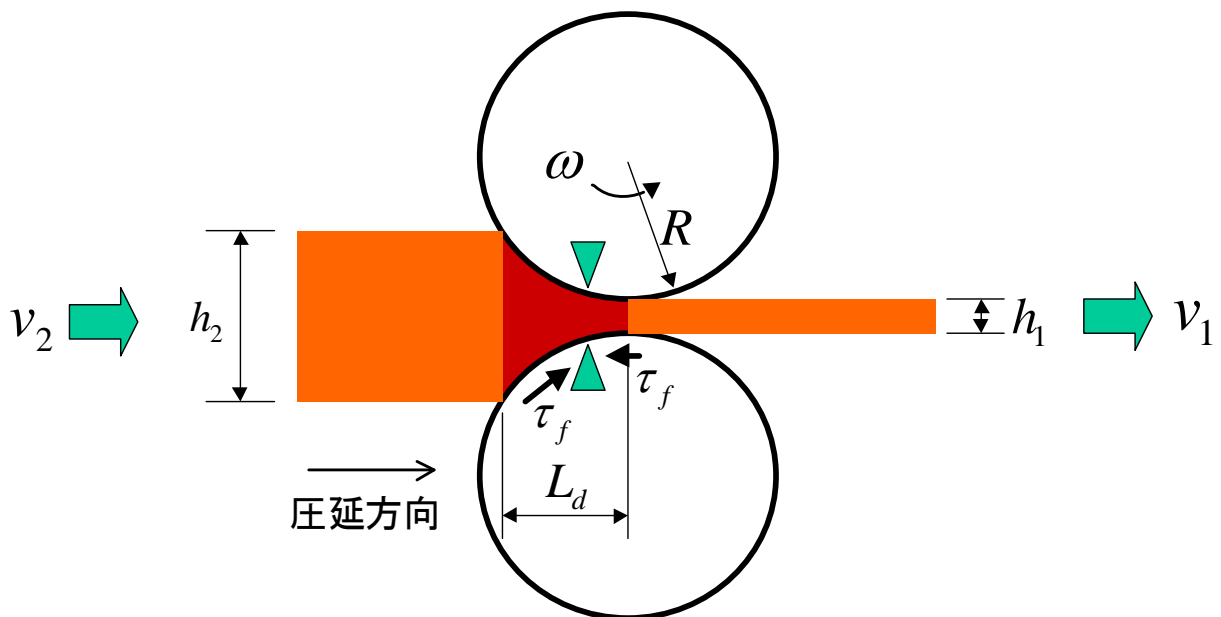


図4 圧延プロセスを特徴づけるパラメータ

### 3.1. 被圧延材速度と中立点、先進率

圧延加工において、被加工材を圧下・延伸するための動力は、ロールの駆動により与えられる。ロールの駆動に伴う被圧延材の入口速度・出口速度を図4の通り、それぞれ  $v_2$ 、 $v_1$  とすれば、塑性変形が体積一定の条件のもとで起こることから、次式の体積流量一定法則が成り立つ。

$$v_2 h_2 = v_1 h_1 \quad (1)$$

入口板厚  $h_2$  ・ 出口板厚  $h_1$  は既知であるから、(1)式のうち独立なパラメータ (変数) は1個である。この被圧延材速度は、上下ワークロールに挟まれている領域 (この領域をロールバイトという) についての、力の釣り合い条件により決まる。ごく特別な例外を除き、力の釣り合いを満足する被圧延材の流動は、以下の関係式を満足することが知られている。

$$\|v_2\| < \|R\omega\| < \|v_1\| \quad (2)$$

$R\omega$  はロールの周速である。(2)式は、「被圧延材の入口速度はロール周速よりも遅く、被圧延材の出口速度はロール周速よりも速い」ということを意味している。ということは、ロールバイト内で入口側から出口側に向かって増加する材料速度が、どこかの場所でロール周速と一致するはずである。この場所を中立点と呼び、図4中には▼で示してある。中立点位置は、ロールバイト内部における力の釣り合い条件で決まる。

中立点より入口側の領域では、被圧延材速度がロール周速より遅い。そこでこの領域を後進域と呼ぶ。この領域では被圧延材速度がロール周速より遅いのであるから、被圧延材にはロールにより引き込まれる方向に力が働く。すなわち、後進域で被圧延材に作用する引き込み力  $\tau_f$  (これは摩擦により引き起こされる) は、図4の右方向に働く。

中立点より出口側の領域では、被圧延材速度はロール周速より速い。この領域を先進域と呼ぶ。先進域で被圧延材に作用する摩擦力は後進域とは逆となり、図4の左方向となる。材料出口速度とロール周速の比により、先進率  $f$  を次式の通り定義する。

$$f = \left\| \frac{v_1 - R\omega}{R\omega} \right\| \quad (3)$$

先進率  $f$  は、中立点位置と深い関係がある。Bland and Ford は、先進率を以下の式で与えている [Ford, H., Ellis, F. and Bland, D.R.:Cold rolling with strip tension, Part I. A new approximate method of calculation and a comparison with other methods. Journal of Iron and Steel institute,168 (1951), 57-72. ]。

$$H_n = \sqrt{\frac{R}{h_1}} \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{h_2 - h_1}{h_1}} \right) - \frac{1}{2\mu} \ln \left( \frac{h_2}{h_1} \frac{1 - \sigma_f / 2k_1}{1 - \sigma_b / 2k_2} \right) \quad (3-2)$$

$$f = \tan^2 \left( \sqrt{\frac{h_1}{R}} \frac{H_n}{2} \right) \quad (3-3)$$

式(3-2)の導出過程は、6.にて述べる。

### 3.2. 圧下率と板厚ひずみ、伸びひずみ、塑性ひずみ

圧下率は、被圧延材の板厚減少率のことであり、次式により定義される。

$$r = \frac{h_2 - h_1}{h_2} \quad (4)$$

たとえば熱間仕上げ圧延の場合、圧下率 $r$ は0.2~0.4（20~40%）程度の値となる。

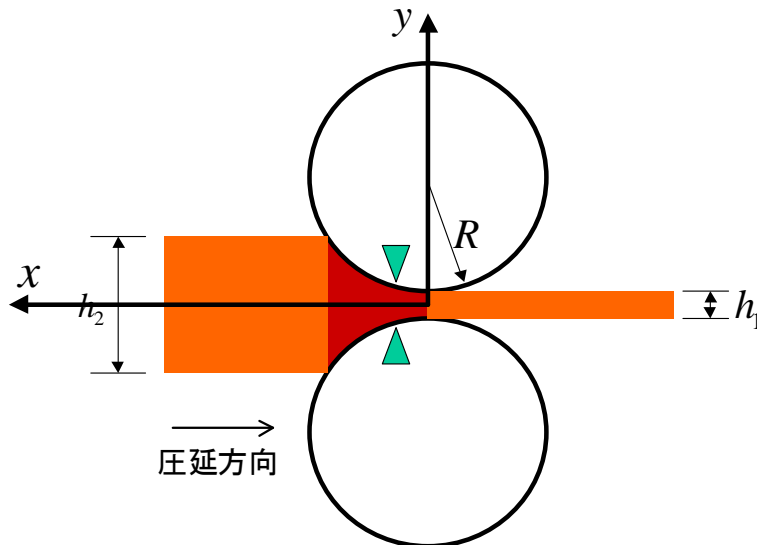


図5 座標軸

図5のごとく、ワークロール下死点の板厚中心を原点として、板厚方向・圧延方向に座標軸  $y$ 、 $x$  を設定する。板厚方向に被圧延材が受ける圧縮ひずみ  $\epsilon_{yy}$  は、次式により表される。

$$\varepsilon_{yy} = \ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right) = \ln(1-r) \quad (5)$$

なぜ板厚ひずみが(5)式の様自然対数により表されるべきであるか、という問題については、若干の塑性力学についての知識が必要であり、疑問を持たれた方は塑性加工の入門書<sup>16)</sup>を参照して頂きたい。塑性変形は体積一定の条件のもとで起こり、そのため(1)式の体積流量一定条件が満足されるが、被圧延材の伸び縮みを表すひずみについては、以下の式が体積一定の条件を表す。

$$\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} = 0 \quad (6)$$

ただし $\varepsilon_{xx}$ は圧延方向ひずみである。従って、(5)式より計算される圧縮ひずみ $\varepsilon_{yy}$ （これは式に値を代入してみると負の値となる）と、圧延方向ひずみ $\varepsilon_{xx}$ の大きさ（絶対値）は等しい。さらに、出口での被圧延材の塑性ひずみ（相当塑性ひずみ） $\bar{\varepsilon}$ は、以下の式により表される。

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2)} = \frac{2}{\sqrt{3}}\|\varepsilon_{yy}\| \approx 1.15\|\varepsilon_{yy}\| = 1.15\|\ln(1-r)\| \quad (7)$$

(7)式にて計算される塑性ひずみが、圧延加工により被圧延材が受ける変形量を表すので、再結晶等による組織変化を見積もるための「ひずみ」として少なくともこれを利用しなければならない。ただし、(7)式には被圧延材が受けるせん断変形の影響が含まれていないので、塑性ひずみが常に過小評価されていることに注意する必要がある。

### 3.3. 接触弧長

接触弧長（投影接触弧長）は、ワークロールと被圧延材が接触している領域の圧延方向に見た長さであり、通常 $L_d$ と記される。図4を参考としつつ、接触弧長の厳密な表示式を得ることも容易にできるが、圧延では通常以下の簡易式が用いられる。

$$L_d \approx \sqrt{R(h_2 - h_1)} \quad (8)$$

圧延ではワークロールと被圧延材とが接触を開始する角度（これを噛み込み角と呼ぶ）が通常小さいことから、(8)式による計算によっても正確に接触弧長 $L_d$ を評価することが

できる。さらに噛み込み角が小さいことによる近似が、他の場面でもしばしば用いられる。

### 3.4. 平均降伏応力（平均変形抵抗）

熱間圧延中の被圧延材は、**図6**に示す様な加工硬化形、動的回復形、動的再結晶形のいずれかの降伏応力（流動応力）－塑性ひずみ曲線を呈する（この曲線はあくまでも一軸圧縮試験により得られることに注意）。材料試験の結果得られるこの曲線は、しばしば  $\bar{\sigma} = F(\bar{\varepsilon}, \dot{\bar{\varepsilon}})$  と近似される。熱間圧延の場合には以下の形の式が用いられる。

$$\bar{\sigma} = C\bar{\varepsilon}^n \dot{\bar{\varepsilon}}^m \quad (9)$$

同種の式は冷間圧延についても得ることができる。なお、(9)式は動的再結晶形の材料には適用できないことに注意されたい。

式(9)や他の近似式により与えられる曲線は流動応力曲線と呼ばれ、ロールバイト内部の各位置においてそこにある材料が今まで受けてきた塑性ひずみに対応した、流動応力を表す。ロールバイト内に含まれる各点の受けてきた塑性ひずみは一般にすべての点で異なる。さらに、式(7)で与えられる出口での塑性ひずみを(9)式に代入して得られる流動応力は、あくまでも出口での流動応力を表すにすぎない。

一方、圧延荷重を簡便に見積もろうとした場合には、「ロールバイト内部での流動応力の平均値」がまず重要なパラメータであり、これを見積もるために考え出されたのが、平均降伏応力（平均流動応力）である。

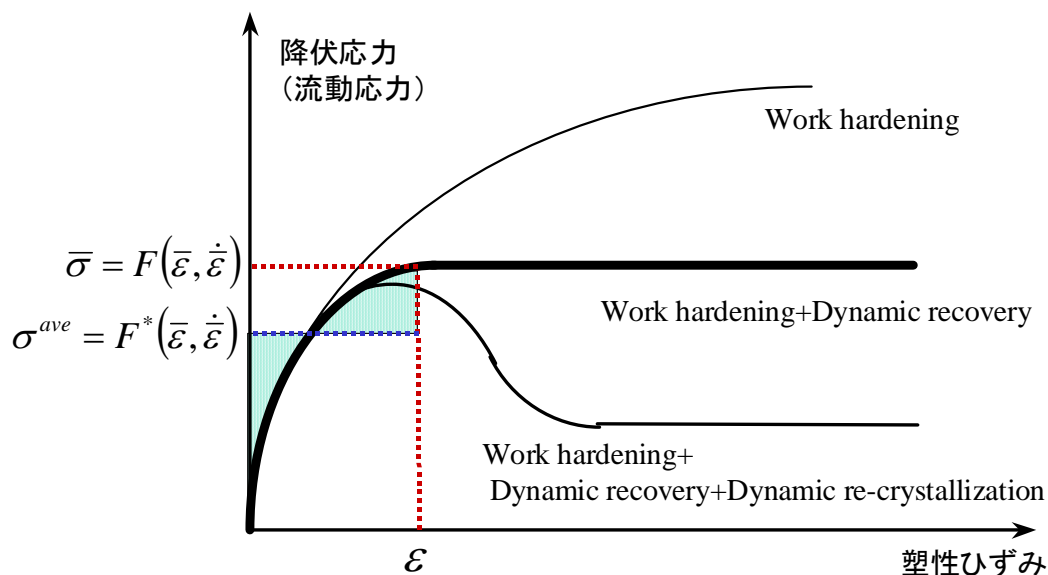


図6 降伏応力(流動応力)曲線と平均降伏応力

平均流動応力は、被圧延材が受けた最終的なひずみ（式(7)により計算される）に至るまでの流動応力の平均値として、



$$\sigma^{ave} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} F(\bar{\varepsilon}, \dot{\bar{\varepsilon}}) d\bar{\varepsilon} \quad (10)$$

と定義される。仮に流動応力曲線が式(9)の通りに表されるものとするれば、

$$\sigma^{ave} = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} C \bar{\varepsilon}^n \dot{\bar{\varepsilon}}^m d\bar{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{1}{n+1} (C \bar{\varepsilon}^{n+1} \dot{\bar{\varepsilon}}^m) \right]_0^{\varepsilon} = \frac{1}{n+1} C \bar{\varepsilon}^n \dot{\bar{\varepsilon}}^m = \frac{1}{n+1} \bar{\sigma} \quad (11)$$

となり、流動応力 $\bar{\sigma}$ と平均流動応力 $\sigma^{ave}$ はひずみの指数 $n$ を介して結びついていることがわかる。なお、熱間温度領域での平均流動応力としては、炭素鋼について炭素量と加工温度をパラメータとして表された美坂の式<sup>17)</sup>がよく利用されている。

### 3.5. 圧下力関数と圧延荷重

圧延荷重 $P$ は、後述する2次元圧延理論より、圧延圧力分布の積分値により評価することができるが、しばしば以下の式に基づく簡単な見積もりが行われる。

$$P = Q_p \cdot \sigma^{*ave} \cdot L_d \cdot b \quad (12-1)$$

$b$ は材料幅である。 $\sigma^{*ave}$ は、2次元変形状態（幅方向の変形を無視した場合）についての平均流動応力であり、材料そのものの特性を表す一軸状態での平均流動応力 $\sigma^{ave}$ の1.15倍となる。(12)式は、「圧延荷重は、接触弧長×幅×2次元変形状態でのロールバイト内での平均流動応力×ある係数、で表される」ことを意味しているが、まさつが無い理想的な変形状態では $Q_p = 1.0$ となることから、係数 $Q_p$ は圧延条件（板厚、ロール半径、圧下率、前後方張力など）による「理想的な変形に比較した倍率」を表した係数である。この $Q_p$ を、圧下力関数と呼ぶ。

式(12-1)に相当する荷重式として、Orowanの理論からの近似式は以下の通りに与えられている。

$$P = (2k_m - t) b \sqrt{R'(h_2 - h_1)} \cdot Q_p \quad (12-2)$$

$$k_m = \frac{\sigma^{ave}}{2} \approx (2k_1 + k_2) / 3 \quad (12-3)$$

$k_m$  は平均せん断降伏応力、 $k_2$  は入口でのせん断降伏応力、 $k_1$  は出口でのせん断降伏応力、 $t$  は平均前後方張力である。

$$t = \frac{1}{2}(\sigma_b + \sigma_f) = 0.5\sigma_b + 0.5\sigma_f \quad (12-3-2)$$

あるいは、志田 [機論(1970), 73/614, 1-13.] によれば、(12-3)式とは逆に、後方張力  $\sigma_b$  の方が圧延荷重に影響が大きいので、

$$t = 0.7\sigma_b + 0.3\sigma_f \quad (12-3-3)$$

と与えることもできる。

$R'$  は扁平後ロール半径で、Hitchcock の式によれば、

$$R' = R \left[ 1 + \frac{16(1-\nu^2)P}{\pi E b (h_2 - h_1)} \right] \quad (12-4)$$

である。式(12-2)では2次元変形状態（幅方向の変形を無視した場合）が含まれていないので、式(12-1)と同じく2次元変形状態についての式に書き換えれば、

$$P = 1.15 \times (2k_m - t) b \sqrt{R'(h_2 - h_1)} \cdot Q_p \quad (12-5)$$

とすることで荷重の見積もりができる。圧下力関数  $Q_p$  の近似式としては、次式が Hill により与えられている。 $\mu$  はまさつ係数である。

$$\begin{aligned} Q_p &= 1.08 + 1.79\mu r \sqrt{1-r} \sqrt{\frac{R'}{h_1}} - 1.02r \\ &= 1.08 + 1.79\mu r \sqrt{\frac{R'}{h_2}} - 1.02r \end{aligned} \quad (12-6)$$

#### 4. Karman の方程式と Nadai の解

1925 年に発表された Karman の微分方程式<sup>1)</sup>は、古典的圧延理論において Orowan の方程式と並ぶ基本的な方程式である。本章では、Karman の方程式と、これの Nadai による解<sup>2)</sup>について詳しく述べる。

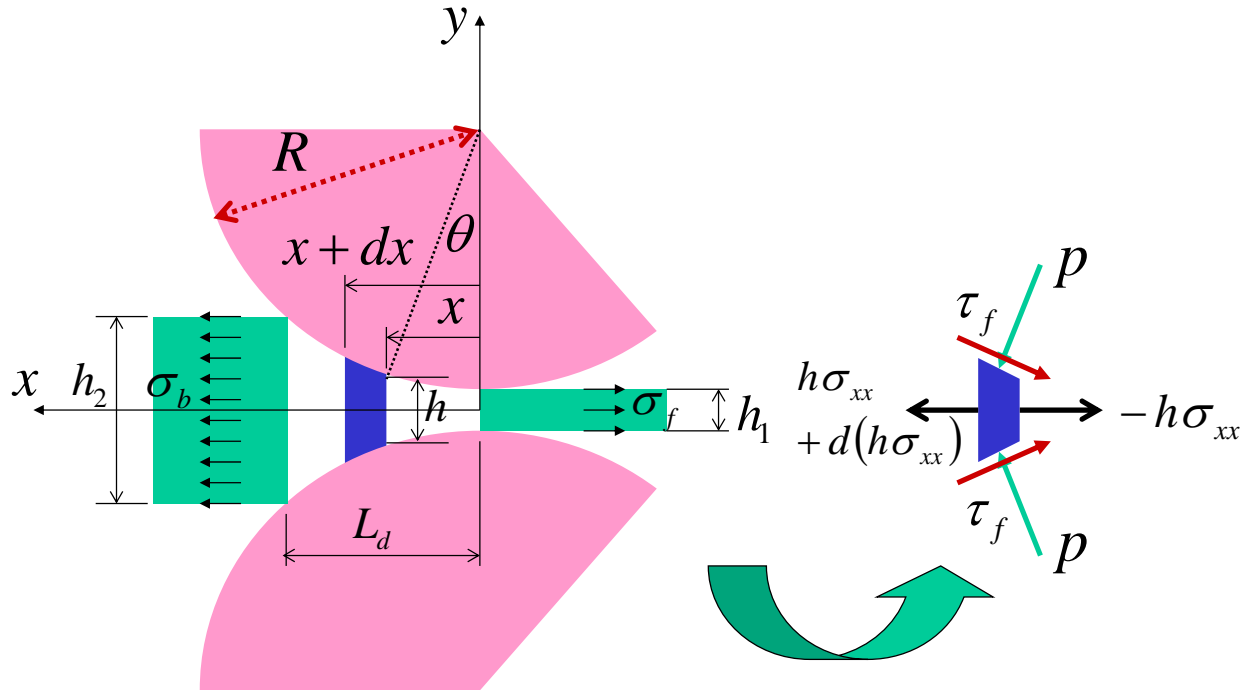


図7 ロールバイト内の微小要素に作用する力

##### 4.1. 圧延方向の力の釣り合い

ワークロールにより挟まれているロールバイト領域について、図7に示す通りの微小要素を考える。微小要素には、

- 1) 圧延方向前面に圧延方向応力  $\sigma_{xx}$ 、
- 2) ワークロールとの接触面にロールからの圧下力（応力）  $p$ 、
- 3) ワークロールとの接触面に摩擦応力  $\tau_f$ 、

が作用しており、またこれらの力は釣り合っているはずである。微小要素を構成する4つの面に作用している力の圧延方向の分力は、

- a) 圧延方向前面 ( $x^-$  面) : 面積  $h$ 、応力  $-\sigma_{xx}$ 、故に合力は  $-h\sigma_{xx}$
- b) 圧延方向後面 ( $x^+$  面) : 面積  $h+dh$ 、応力  $\sigma_{xx}+d\sigma_{xx}$ 、故に合力は  $h\sigma_{xx}+d(h\sigma_{xx})$
- c) 圧下力 : 面積  $\frac{dx}{\cos\theta}$ 、圧延方向応力成分は  $p\sin\theta$ 、故に合力は  $p\sin\theta \cdot \frac{dx}{\cos\theta}$

d) 摩擦力：合力は、後進域で  $-\tau_f \cos \theta \cdot \frac{dx}{\cos \theta}$ 、先進域で  $\tau_f \cos \theta \cdot \frac{dx}{\cos \theta}$

である。微小要素の圧延方向に見た幅が  $dx$  であることから、ワークロールと被圧延材との接触面の長さは、 $dx/\cos \theta$  となることを、c) d) を導く際に利用している。さらに、圧延方向応力  $\sigma_{xx}$  は、塑性力学の慣例に従い圧縮側を負、引張り側を正としている。また、圧延方向ロールバイトにおいて、被圧延材厚さ方向に見た応力分布は一様であり、被圧延材内部のせん断応力は無視されている。

摩擦力がクーロンの法則に従うものとすれば、以下の通りに表される。

$$\tau_f = \mu p \quad (13)$$

微小要素についての圧延方向力の釣り合い条件は、この要素に作用する力の合計がゼロとなることである。これを数式にて表示すると、

$$d(h\sigma_{xx}) + 2p \frac{dx}{\cos \theta} \cdot \sin \theta \mp 2\mu p \frac{dx}{\cos \theta} \cdot \cos \theta = 0 \quad (14)$$

$$\text{【後進域について】 } d(h\sigma_{xx}) + 2p \frac{dx}{\cos \theta} \cdot \sin \theta - 2\mu p \frac{dx}{\cos \theta} \cdot \cos \theta = 0$$

$$\text{【先進域について】 } d(h\sigma_{xx}) + 2p \frac{dx}{\cos \theta} \cdot \sin \theta + 2\mu p \frac{dx}{\cos \theta} \cdot \cos \theta = 0$$

が得られる。若干式を変形することにより、

$$\frac{d(h\sigma_{xx})}{dx} + 2p(\tan \theta \mp \mu) = 0 \quad (15)$$

の微分方程式が得られるから、これを適切な境界条件のもとで解くことにより、ロールバイト内部での応力分布や圧延圧力分布が得られる。この式を、**Karman** の（圧延）方程式と呼ぶ。符号  $\pm, \mp$  は、上側は後進域、下側は先進域を表す。

ただし(15)式のままだでは、変数が圧延方向応力  $\sigma_{xx}$  と圧下力  $p$  の2個含まれているため、どちらか一方を消去しないと解くことができない。また、(15)式には被圧延材の降伏応力が含まれていないという問題もある。

ロールバイト内の被圧延材は塑性変形をしている。降伏条件は、塑性変形している材料が満足すべき、応力についての条件である。現在考えている問題についての降伏条件を **Tresca** の降伏条件により表示すると、せん断降伏応力を  $k$  として、

$$\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} = k = \frac{\sigma_0}{2} \quad (16)$$

と表される。式(16)の $\sigma_0$ は平均降伏応力であるから、せん断降伏応力を $k$ はその平均値である $k_m$ を代入する方が本来は正しい。 $\sigma_{yy}$ は板厚方向応力、 $\sigma_0$ は一軸降伏応力である。ワークロールと被圧延材との接触弧長 $L_d$ はロール半径 $R$ と比較して十分に小さいから、 $\sigma_{yy} \approx -p$ と近似することができ、従って(16)式は

$$\sigma_{xx} + p = 2k \quad \text{あるいは} \quad \sigma_{xx} + p = 2k_m \quad (16')$$

の形に置き換えることができる。これを(15)式に代入することにより、圧延方向応力 $\sigma_{xx}$ と圧下力 $p$ のいずれかを消去することができる。

$$\frac{d(h(2k - p))}{dx} + 2p(\tan \theta \mp \mu) = 0 \quad (15')$$

(15')式を $p$ について解くことにより、ロールバイト内部での $p$ の分布、すなわち圧延圧力分布を得ることができる。

#### 4.2. Nadai による解

ワークロールと被圧延材との接触弧長 $L_d$ は、ワークロール半径 $R$ と比較して十分に小さい場合、すなわちワークロール半径と比較して板厚が十分小さい場合には、角度 $\theta$ について以下の近似を行うことができる。

$$\tan \theta \approx \sin \theta = \frac{x}{R} \quad (17)$$

さらに、この様な場合には、ワークロール円弧を放物線により近似することができる。すなわち、

$$h \approx h_1 + \frac{x^2}{R} \quad (18)$$

仮に一軸降伏応力が場所によらず一定であるとすれば（つまり一軸降伏応力がひずみによらず一定であるとすれば）、(15')式は、

$$\frac{d(h(2k-p))}{dx} + 2p(\tan \theta \mp \mu) = (2k-p) \frac{dh}{dx} - h \frac{dp}{dx} + 2p(\tan \theta \mp \mu) = 0 \quad (15'')$$

の形で書き直すことができる。(15'')式に(17)式、(18)式を代入して整理すると、(19)式が得られる。

$$\left( h_1 + \frac{x^2}{R} \right) \frac{dp}{dx} \pm 2\mu p - 4 \frac{x}{R} k = 0 \quad (19)$$

以後、(19)式を解く。まず、 $z \equiv \frac{x}{\sqrt{Rh_1}}$ 、 $g \equiv \frac{p}{2k}$ 、 $a \equiv 2\mu \sqrt{\frac{R}{h_1}}$  とおき(19)式に代入すると、

$$(1+z^2) \frac{dg}{dz} \pm ag = 2z \quad (20)$$

が得られ、さらに  $z \equiv \tan v$  とおけば、 $\frac{dz}{1+z^2} = dv$  であるから、

$$\frac{dg}{dv} \pm ag = 2 \tan v \quad (21)$$

が得られる。上式は積分でき、積分定数を  $K$  とすると、

$$g = \exp(\mp av) \cdot \left[ K + 2 \int \exp(\pm av) \tan v dv \right] \quad (22)$$

と変形される。さらに、(17)式、(18)式を同様の近似により  $\tan v \approx v$  とできるので、(22)式は(23)式の様に変形される。

$$g = K \exp(\mp av) - \frac{2(1 \mp av)}{a^2} \quad (23)$$

積分定数はロールバイト入口面・出口面での前後方張力により定まる。図7の通り、前方張力を $\sigma_f$ 、後方張力を $\sigma_b$ とすれば、境界条件は、

$$\text{入口面 } x=L_d \text{ で } \sigma_{xx} = \sigma_b \text{ すなわち } g = g_b = \frac{p|_{x=L_d}}{2k} = \frac{2k - \sigma_b}{2k}$$

$$\text{出口面 } x=0 \text{ で } \sigma_{xx} = \sigma_f \text{ すなわち } g = g_f = \frac{p|_{x=0}}{2k} = \frac{2k - \sigma_f}{2k}$$

であることから積分定数を決めると、無次元化圧延圧力 $g \equiv \frac{p}{2k}$ は以下の通りに与えられる。

ただし、 $v = \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{Rh_1}}$ 、 $v_b = \tan^{-1} \frac{L_d}{\sqrt{Rh_1}}$ 、 $a \equiv 2\mu \sqrt{\frac{R}{h_1}}$ である。

$$\text{後進域 } g = \frac{p}{2k} = \left( g_b + \frac{2(1-av_b)}{a^2} \right) \cdot \exp[a(v_b - v)] - \frac{2(1-av)}{a^2} \quad (24-1)$$

$$\text{先進域 } g = \frac{p}{2k} = \left( g_f + \frac{2}{a^2} \right) \cdot \exp[av] - \frac{2(1+av)}{a^2} \quad (24-2)$$

計算は、入口面側より式(24-1)を、出口面側より式(24-2)を用いて行い、両者により計算される圧延圧力が一致する位置 $v_n = \tan^{-1} \frac{x_n}{\sqrt{Rh_1}}$ が中立点位置である。

なお、式(24)は滑り摩擦状態についての式でありロールと被圧延材の接触弧全域でクーロン摩擦、が成り立つことを前提としている。高摩擦係数あるいは高圧延圧力の場合には、式(24)で計算される摩擦応力は被圧延材のせん断降伏応力を超える可能性がある。この場合、式(24)は非現実的な解を与えるので、Karmanの式の解は潤滑状態が良好な圧延、例えば冷間圧延への適用が望ましい。2次元圧延理論の各種摩擦状態についての解は、戸澤によりまとめられている<sup>23)</sup>。

#### 4.3. 限界噛み込み角

後進域では圧下力の圧延方向成分は、摩擦による被圧延材の引き込み力と逆の方向に作用する。ある限界を超えると圧下力の圧延方向成分(抵抗)が摩擦力より大きくなり、被圧延材がロールバイト内に噛み込まれないという現象が起こる。

被圧延材がワークロールに噛み込まれるためには、

$$\tau_f \cos \theta \geq p \sin \theta \quad (25)$$

である必要があるが、(13)式を代入して整理すると、以下の式が得られる。(26)式より、摩擦係数に応じて計算される角度を、特に限界噛み込み角と呼ぶ。

$$\mu \geq \tan \theta \quad (26)$$

#### 4.4. 計算例

図8に、ロール半径 350mm、初期板厚 1.2mm、压下率 15%、摩擦係数 0.1 を基準条件とする圧延圧力分布の計算例を示す。図8-1には、無張力より前後方張力を一軸降伏応力の 10~50%まで変化させた場合、図8-2は压下率を変化させた場合、図8-3は摩擦係数を変化させた場合、の結果である。

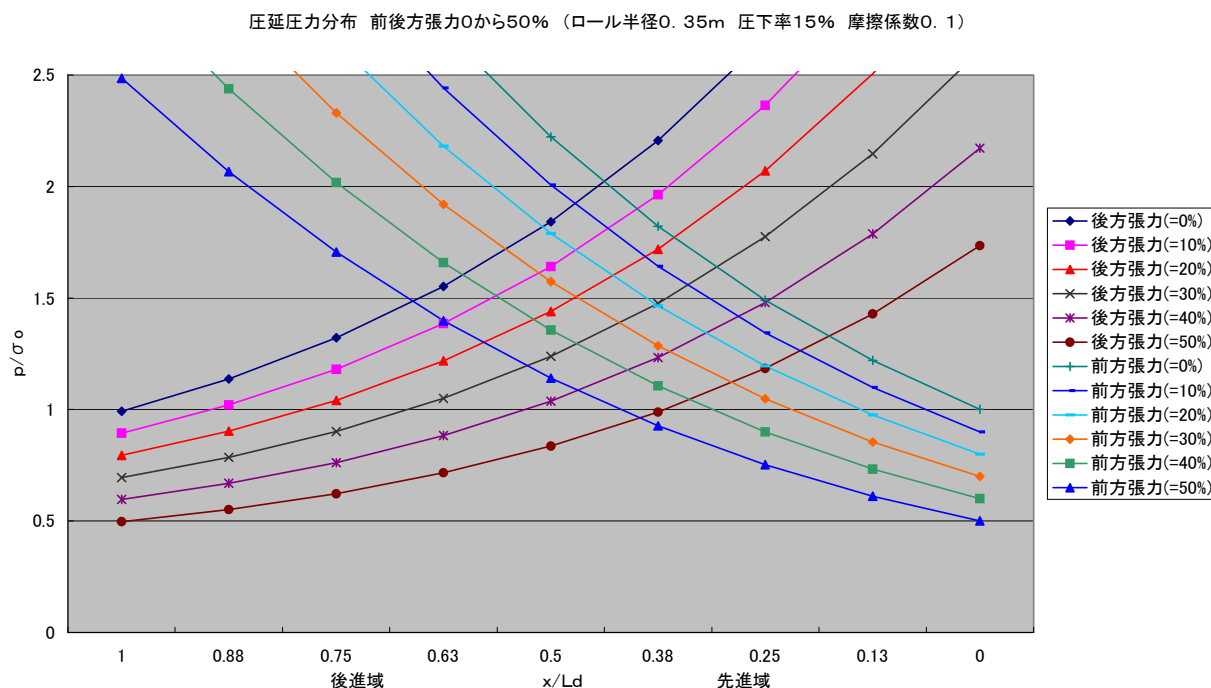


図8-1 圧延圧力分布(張力を変化させた場合)

張力の増加に伴い圧延圧力が減少すること、また張力を付与することにより中立点が移動することが示されている。たとえば後方張力を付与すると、中立点が出口側に移動し先進率が減少するが、この様な圧延加工の基本的な特性を把握するのに式(24)は威力を発揮する。なお冷間圧延ではロールバイトにおいて、被圧延材厚さ方向に見た応力分布は比較的均一であり被圧延材内部のせん断応力も小さいので、Karman の方程式をもとにした解析でも、比較的精度が高い結果が得られる。



圧延圧力分布 摩擦係数0.05から0.25 (ロール半径0.35m 圧下率15% 前後方張力なし)

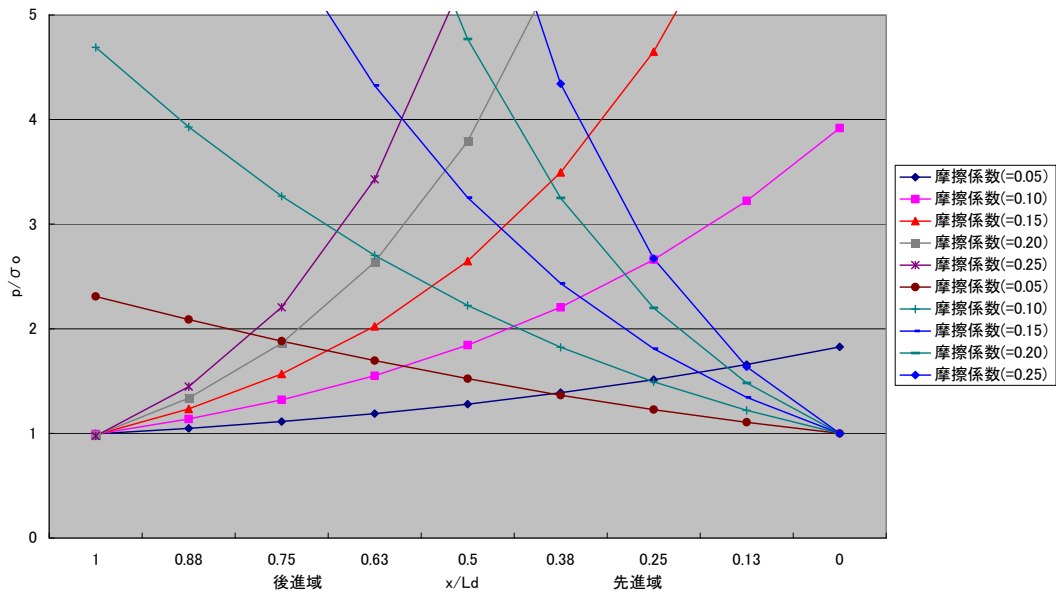


図8-2 圧延圧力分布(摩擦係数を変化させた場合)

圧延圧力分布 圧下率5から30% (ロール半径0.35m 摩擦係数0.1 前後方張力なし)

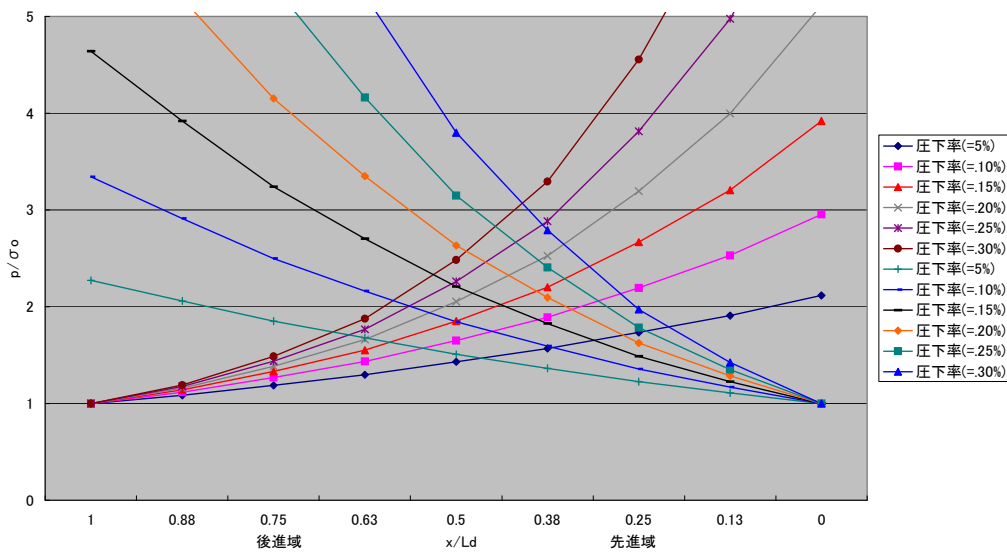


図8-3 圧延圧力分布(圧下率を変化させた場合)

## 5. 加工硬化の影響を考慮した理論

以上に説明した Karman の圧延理論および Nadai による解では、式(16)(17)からわかる通り被圧延材の降伏応力は一定であって、圧延圧力は、式(10)(11)の平均降伏応力  $\sigma^{\text{ave}}$  を  $2k$  と同一視して計算を行うことになる。これに対し、ロールバイト内での加工硬化に伴う降伏応力の変化を直接考慮できる理論として、Bland and Ford の理論<sup>3)</sup>がある。力

のつり合い式

$$\frac{d(h\sigma_{xx})}{dx} + 2p(\tan\theta \mp \mu) = 0 \quad (15)$$

を、せん断降伏応力  $2k$  を含む形で式(26)の通りに表す。

$$\frac{d}{dx} \left( 2kh \frac{\sigma_{xx}}{2k} \right) + 2p(\tan\theta \mp \mu) = 0 \quad (26)$$

式(26)の第1項を変形すると、次の式(27)を得る。

$$\frac{\sigma_{xx}}{2k} \frac{d}{dx} (2kh) + 2kh \frac{d}{dx} \left( \frac{\sigma_{xx}}{2k} \right) + 2p(\tan\theta \mp \mu) = 0 \quad (27)$$

Bland and Ford は、式(27)の第1項に着目し、ロールバイト内では加工硬化に伴い入り口から出口に向かって  $2k$  は増加、 $h$  は減少することから、その積である  $2kh$  の変化率である式(27)の第1項は相対的に小さく無視できるものとした。さらに降伏条件を代入し、位置角  $\theta$  によって表すと、以下の式(28)が得られる<sup>23)</sup>。

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{p}{2k} \right) = \frac{p}{2k} \frac{2R}{h} (\theta \mp \mu) \quad (28)$$

この式は積分できて、境界条件として、接触開始位置の位置角を  $\alpha$  とすれば、

$$\text{入口面 } x = L_d (\theta = \alpha) \text{ で } h = h_2, \quad k(L_d) = k_2, \quad \sigma_{xx} = \sigma_b, \quad \sigma_b - \sigma_{yy} = \sigma_b + p = 2k_2$$

$$\text{すなわち } g = g_b = \frac{p|_{x=L_d}}{2k} = \frac{2k_2 - \sigma_b}{2k_2}$$

$$\text{出口面 } x = 0 (\theta = 0) \text{ で } h = h_1, \quad k(0) = k_1, \quad \sigma_{xx} = \sigma_f, \quad \sigma_f - \sigma_{yy} = \sigma_f + p = 2k_1$$

$$\text{すなわち } g = g_f = \frac{p|_{x=0}}{2k} = \frac{2k_1 - \sigma_f}{2k_1}$$

を代入し、以下の式(29)を圧延圧力分布として得る。

$$\text{後進域 : } p = 2k \left( 1 - \frac{\sigma_b}{2k_2} \right) \left( \frac{h_1}{h_2} + \frac{R}{h_2} \theta^2 \right) \exp \left\{ 2\mu \sqrt{\frac{R}{h_1}} \left[ \tan^{-1} \left( \alpha \sqrt{\frac{R}{h_1}} \right) - \tan^{-1} \left( \theta \sqrt{\frac{R}{h_1}} \right) \right] \right\} \quad (29-1)$$

$$\text{先進域} : p = 2k \left( 1 - \frac{\sigma_f}{2k_1} \right) \left( 1 + \frac{R}{h_1} \theta^2 \right) \exp \left\{ 2\mu \sqrt{\frac{R}{h_1}} \tan^{-1} \left( \theta \sqrt{\frac{R}{h_1}} \right) \right\} \quad (29-2)$$

ここで $k_2, k_1$ はそれぞれ、入口面、出口面でのせん断降伏応力である。せん断降伏応力 $k$ には分布がある ( $k=k(x)$ である) というのが Bland & Ford 理論の立場であり、その近似方法からは $2kh$ が一定であるとの前提にたっているので、 $2k \propto 1/h$ なる硬化則が $2k(x)$ について満足されるべきである。ただしこの硬化則は必ずしも正しいとは言えないことに注意せねばならない。実際、流動応力の分布 $2k(x)$ としては、式(7)から圧延方向位置 $x$ についてひずみ $\bar{\varepsilon}$ を求め、流動応力式 $\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})$ を $\bar{\varepsilon}$ の関数として計算し、 $2k(x) = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})$ として与えることが行われている様である。

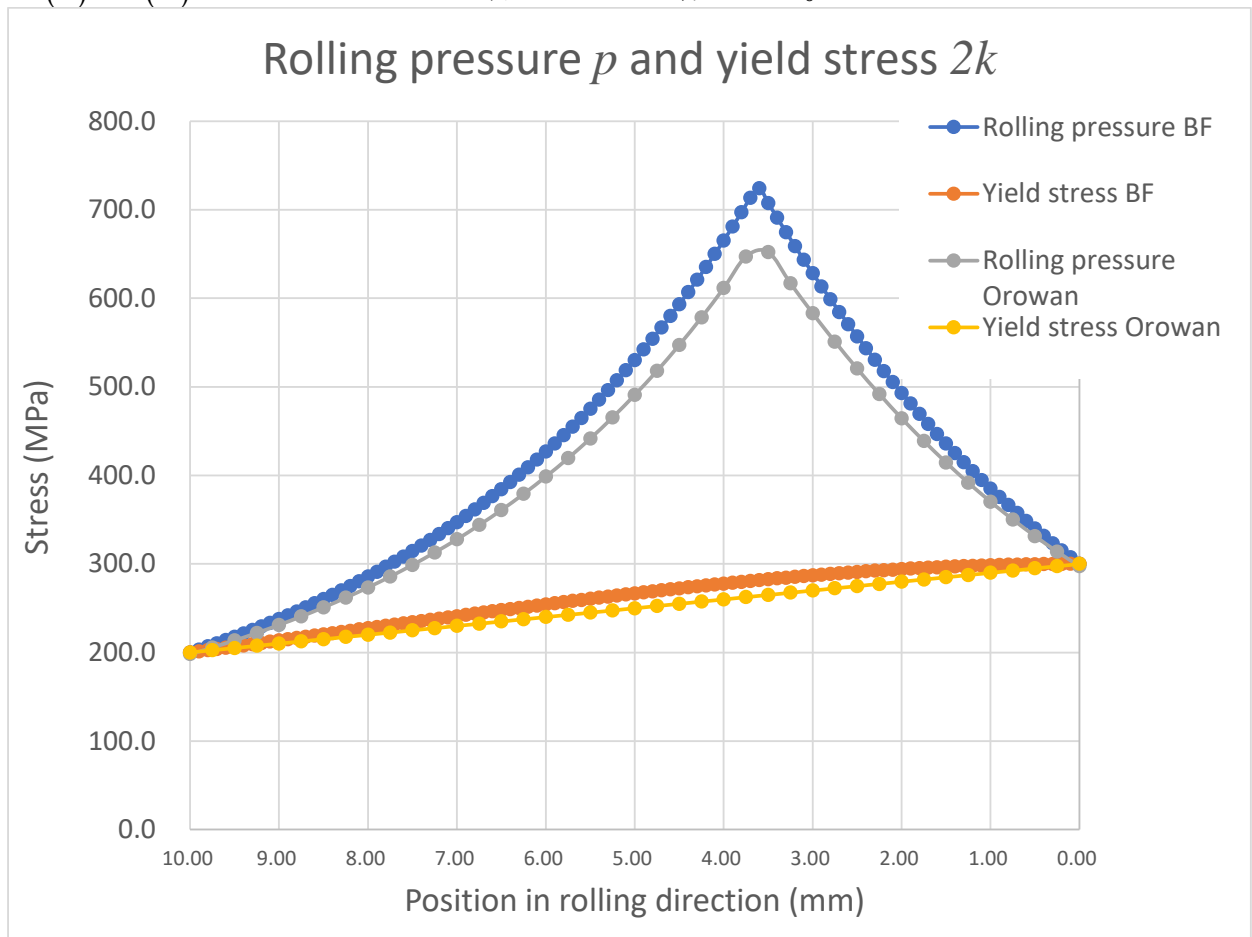


図 8-2 Orowan の理論と Bland&Ford の理論による圧延圧力

図 8-2 に、Orowan の理論と Bland&Ford の理論による圧延圧力を比較する。Bland & Ford では $2kh$ を一定とし、Orowan では入口から出口にかけて $2k$ を線形近似している (降伏応力の分布は図にある通り一致はしていない計算結果の比較である)。Orowan

の理論で利用した降伏応力が低いこと、また Orowan の理論ではせん断応力を考慮しているため若干低い圧延圧力となるが、中立点の位置はほぼ同じ位置となる。

## 6. Bland & Ford の先進率式

タンデム圧延における先進率を表すために広く利用されている、Bland & Ford の先進率式を以下にまとめる。

パラメータ  $H(\theta)$  を式(30)で表す。

$$H(\theta) = 2\sqrt{\frac{R}{h_1}} \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{R}{h_1}} \theta \right) \quad (30)$$

Bland&Ford によれば、中立点  $H(\theta)$  でのパラメータの値を  $H(\theta_n) = H_n$  として、中立角  $\theta_n$  は以下の式で表される。

$$\theta_n = \sqrt{\frac{h_1}{R}} \tan \left( \sqrt{\frac{h_1}{R}} \frac{H_n}{2} \right) \quad (30)$$

$$H_n = \sqrt{\frac{R}{h_1}} \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{h_2 - h_1}{h_1}} \right) - \frac{1}{2\mu} \ln \left( \frac{h_2}{h_1} \frac{1 - \sigma_f / 2k_1}{1 - \sigma_b / 2k_2} \right) \quad (3-2)$$

以下に中立角と先進率との関係を求める。中立点での板厚を  $h_n$ 、ロール速度を  $v_R = R\omega$  とすると、 $f$  は以下の式(3)により表される。

$$f_s = \left\| \frac{v_1 - v_R}{v_R} \right\| \quad (3)$$

中立点での圧延方向速度を  $v_n$  とする。  $v_n = v_R \cos \theta_n$  であり、マスフロー一定則 (式(1))

より  $h_n v_n = h_1 v_1$  であるので (以下には絶対値記号は省略)、

$$f = \frac{v_1 - v_R}{v_R} = \frac{v_1}{(v_n / \cos \theta_n)} - 1 = \frac{v_1}{v_n} \cos \theta_n - 1 = \frac{h_n}{h_1} \cos \theta_n - 1 \approx \frac{h_n - h_1}{h_1} \quad (31)$$

ここで、 $\frac{h_n - h_1}{2} = R(1 - \cos \theta_n) \approx R \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{\theta_n^2}{2} \right) \right\} = \frac{R\theta_n^2}{2}$  であるから、式(31)に代入することで、次式を得る。

$$f = \frac{v_1 - v_R}{v_R} \approx \frac{h_n - h_1}{h_1} = \frac{R\theta_n^2}{h_1} = \tan^2 \left( \sqrt{\frac{h_1}{R}} \frac{H_n}{2} \right) \quad (3-3)$$

これを、Bland & Ford の先進率式と呼ぶ。

## 7. まとめ

圧延理論－1 について説明した。参考文献等は、圧延理論全体でまとめ、末尾に記されているので参照して頂きたい。