

剛塑性有限要素法 (圧延解析を中心として)

東京大学生産技術研究所 柳本 潤

1. はじめに

圧延理論は圧延技術と同期して発展してきた。Karman¹⁾，Orowan²⁾に始まる圧延理論は，種々の近似解法の提示を通して発展してきており，現在までに至る 75 年間の間，圧延技術開発に少なからず貢献してきたことは衆目の認めるところである。

これらの圧延理論は，1)力の釣り合い条件，2)被圧延材の降伏条件，3)被圧延材の塑性流動式，4)境界条件，により構成される微分方程式群と，この微分方程式の近似解析手法・近似解とからなっているが，実はこれらの圧延理論には有限要素法の登場以前から，差分法などの数値解析が利用されてきた。例えば Orowan の微分方程式²⁾を厳密に解くためには数値計算が必要であるし，ロール変形を連成した板プロフィール解析^{3),4)}は差分法を利用するからこそ結果を得ることが可能なのである。被圧延材の3次元塑性変形をより正確に解明するために導入された数値解析法が有限要素法であり，現在、板圧延の厳密な3次元解析には、有限要素法による被圧延材の3次元変形をロール・圧延機の弾性変形と連立させて解くことが一般的に行われている。

有限要素法による板圧延の数値解析は圧延理論の一部であって，従来より存在する圧延理論との連続性は保たれている。図1に、差分法、有限要素法を利用した圧延理論の成り立ちをまとめる。

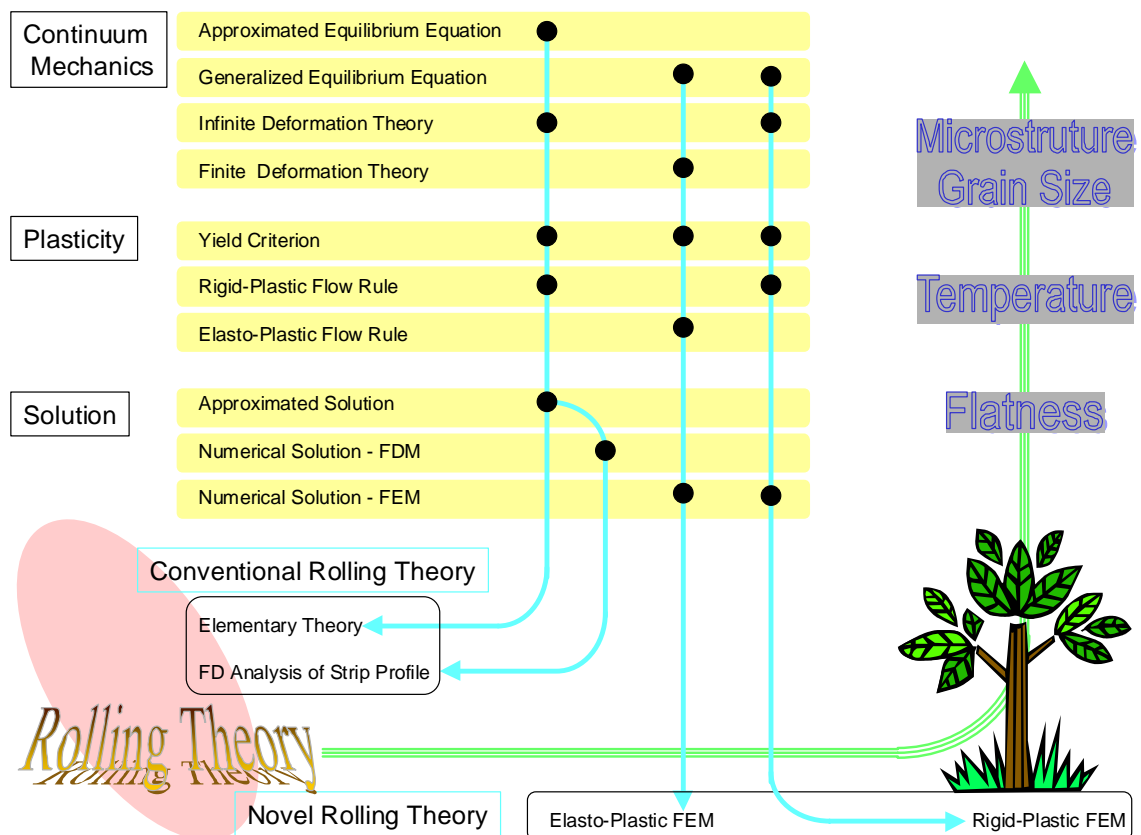


図1 圧延理論の成り立ち

2. 有限要素法による板圧延の数値解析技術の定式化

板圧延における板クラウン、エッジドロップの解明を行うためには、1)被圧延材の3次元塑性変形を、2)ロールの扁平変形、3)ロールの軸たわみ変形と連立させて解く必要がある。ロールの軸たわみ変形は、分割モデル⁵⁾を利用する。これは、ロールを中実円柱はりともみなし、被圧延材からロールが受ける板幅方向に分布する荷重に対応した、ロールの軸たわみを材料力学に基づき数値的に計算する手法である。ロールの軸たわみを有限要素法で解くこともできるのではあるが、分割モデルの良好な精度、短い計算時間は現在でも認められており、広く利用されている。ロールの扁平変形のうち、多段圧延機のワークロール - バックアップロールの接触扁平変形については、材料力学・弾性理論式が利用されている⁶⁾。ワークロール - 被圧延材間の扁平変形については、弾性理論式を利用する場合と弾性有限要素法を利用する場合があるが、弾性理論式でも十分な精度での解析が可能であることがわかっている⁷⁾。

残る被圧延材の変形については、1990年代に入ってから有限要素法の適用が急速に進んだ⁸⁾。1990年代初頭に板幅方向板厚精度の向上が大いなる関心を持って議論されたが、圧延条件と板プロフィール(特にエッジドロップ)との関係を理論的に究明するためには、板エッジ部に発生する3次元塑性流れを高精度に解く必要があった。そのために導入されたのが、定常塑性変形を対象とした剛塑性有限要素法である。

2.1 釣合い式

有限要素法では、被圧延材内部に発生する応力についての釣合いを基礎式とする。たとえば2次元問題(平面ひずみ圧延)については、以下の釣合い式(1)が解くべき方程式である。式(1)は上より、圧延方向(x 方向)、板厚方向(y 方向)の釣合い式である。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

一方、古典圧延理論(2次元理論)において解くべき基礎方程式は、ロールバイト内部での圧延方向力の釣合い方程式である^{1),2)}。ワークロールにより挟まれているロールバイト領域について、図2に示す通りの微小要素(スラブ要素)を考える。スラブ要素には、圧延方向前面に圧延方向応力 σ_{xx} 、ワークロールとの接触面にロールからの圧下力(応力) p 、ワークロールとの接触面にまさつ力 τ_f が作用しており、またこれらの力は釣合っているはずである。スラブ要素を構成する4つの面に作用している圧延方向力の合計がゼロであることが釣合い状態を表すので、

$$\frac{d(h\sigma_{xx})}{dx} + 2p(\tan\theta \mp \mu) = 0 \quad (2)$$

なる微分方程式が得られる。 μ はまさつ係数である。符号 \pm, \mp は、上側は後進域、下側は先進域を表す。式(2)はKarmanによって与えられたが¹⁾、図2に示す通りロール表面を含むスラブ要素を考える場合、被圧延材の内部せん断応力は圧延方向の釣合いに影響しないので、被圧延材の内部せん断応力を考慮したOrowanの理論でも²⁾、基礎とする釣合い式は基本的には同じである。ただしOrowanの圧延理論では、被圧延材の内部せ

h 断応力 σ_{xy} が考慮されているため圧延方向応力 σ_{xx} が板厚方向に分布を持つ．それ故，圧延方向合力の表示式が若干異なる．

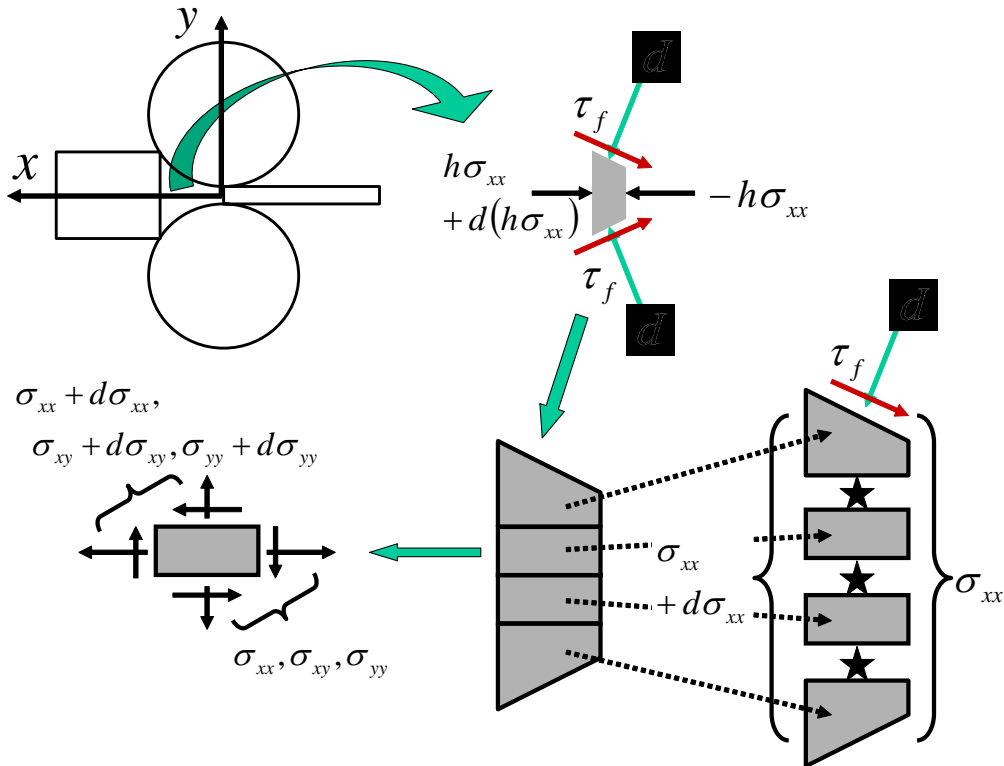


図2 一般化された釣合い式と Karman の方程式との関係

さて、式(1)は、圧延の解析のみならず、鍛造、押出し、引抜き、板材成形などの各種塑性加工の解析における基礎式である。式(1)を導出する過程は塑性力学もしくは塑性加工の教科書においてふれられている通りであるが、まずは応力 σ が場の関数 $\sigma = \sigma(x, y)$ であるとし、図2中左下に示されている4面体要素の右下の基準点における応力の成分を $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$ 、基準点より Δx もしくは Δy 隔たった面での応力の成分を、 $\sigma_{xx} + d\sigma_{xx}, \sigma_{xy} + d\sigma_{xy}, \sigma_{yy} + d\sigma_{yy}$ と書くものとする。応力 σ の変化量 d についてテーラー展開を行い、釣合いを取った結果得られるのが式(1)である。実は、Karman の方程式(2)と式(1)を導く過程は本質的に同じである。

一方、複数の基準要素と上下ロール面を含む2個の台形要素によって、スラブ要素を構成することを考える。被圧延材内部に表れる内部分割面（面）について上下要素より作用する応力は釣合っているため打ち消しあう。従って、微小要素を積み重ねてスラブ要素を構成する場合、スラブ要素の釣合いを表示する式中に残る力の成分は、1)圧延

方向前面の圧延方向合力 $-\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dy$ 、2)圧延方向前面の圧延方向合力 $\int_{-(h+dh)/2}^{(h+dh)/2} (\sigma_{xx} + d\sigma_{xx}) dy$ 、

3)ワークロールとの接触面にロールから作用する圧下力 p とまさつ力 τ_f 、である。以上

1)2)は式(2)左辺第1項、3)は左辺第2項そのものである。すなわち、Karman の釣合い式(2)は、連続体内部の基準要素について一般的に成立する釣合い式(1)の特殊形である。逆に、有限要素法で基礎とする釣合い式(1)は、古典圧延理論で基礎とする釣合い式(2)を一般化したものである。古典圧延理論と、有限要素法による圧延解析において、基礎とする釣合い式に本質的な差は存在せず、両者の相違は単に釣合いを満足する要素の定義と、

釣合いを満足する方向の数にすぎない(Karman の式では、圧延方向の釣合いのみを満足する)。有限要素法では、基準要素についての一般化された釣合い式を基礎式としている。そのため、任意の形状について釣合いを満足させて解析を実施することができ、3次元解析への拡張も容易で、さらに、被圧延材内部の塑性変形を自由に表現することができるという特徴がある。

2.2 構成式

圧延シミュレータの多くは剛塑性解析を前提としているが、その場合には式(3)で与えられる Levy-Mises の構成式、

$$\sigma'_{ij} = \frac{2\bar{\sigma}}{3\dot{\varepsilon}} \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (3)$$

を利用する。なお、以後の式の表示には、適宜指標記法を利用する。この式は、Mises の降伏条件と、「偏差応力テンソルとひずみ増分テンソルの主軸が一致する」とした Reuss の仮定、によって導かれている。釣合い式(2)を3次元問題も含む様に一般化すると、

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = 0 \quad (4)$$

が得られ、さらにこれを弱形式(積分形式)表示して、体積一定条件を Lagrange 乗数によって付帯すると、

$$\int_V \sigma'_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_{S_F} \bar{T}_i \delta \dot{u}_i ds + \int_V \lambda \delta \varepsilon_{kk} dV + \int_V \delta \lambda \dot{\varepsilon}_{kk} dV = 0 \quad (5)$$

が導かれる。 $\delta(\)$ は境界条件を満足し且つ釣合っている状態からの仮想変動を表す。ただし、 σ'_{ij} は偏差応力テンソルの成分、 \bar{T}_i は考えている閉領域 V の表面力境界 S_F に作用する表面力である。式(5)が任意の $\delta \dot{u}_i, \delta \lambda$ について成立する場合について有限要素表示すると、節点速度 $\{\dot{u}\}^n$ とラグランジェ乗数 λ (これは要素静水圧応力 $\frac{1}{3}\sigma_{kk}$ に等しい)を未知数とした非線形連立一次方程式が得られる。

2.3 有限要素法による離散化

ある要素 n の節点速度を $\{\dot{u}\}^n$ とすれば、要素内部の任意の位置での速度 $\{\dot{u}\}$ は以下の関数によって補間できる⁹⁾。

$$\{\dot{u}\} = [N]\{\dot{u}\}^n \quad (6)$$

ただし $[N]$ は形状関数である。節点速度、形状関数の次元数は、対象としている問題の次元数(1次元/2次元/3次元)と、利用する要素を構成する節点数(頂点数)によって異なる。例えば3次元問題を一般的な6面体要素で取り扱う場合には、次元数は3、節点数は8なので、節点速度 $\{\dot{u}\}^n$ は24行1列、要素の任意の位置での速度は3行1列

のベクトルとなり，両者の内挿関係を規定する形状関数 $[N]$ は3行24列のマトリックスとなる．

ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}$ は速度 \dot{u} の空間勾配によって表される．この定義式に基づいて式(6)を変換すると，節点速度と要素内部の任意の位置とを関係づける式が得られる．

$$\{\dot{\varepsilon}\} = [B]\{\dot{u}\}^n \quad (7)$$

$[B]$ は，形状関数 $[N]$ の勾配である．3次元問題の場合ひずみ速度は6成分あるので， $[B]$ は6行24列のマトリックスとなる．

式(3)で与えられていた Levy-Mises の流動則を，マトリックス形式で表すと次式が得られる．

$$\{\sigma'\} = \frac{2\bar{\sigma}}{3\dot{\varepsilon}} \{\dot{\varepsilon}\} = \frac{2\bar{\sigma}}{3\dot{\varepsilon}} [B]\{\dot{u}\}^n \quad (8)$$

相当応力は材料特性そのものであり，実験結果をもとに温度，ひずみ，ひずみ速度の関数として与える．また，美坂の式¹⁰⁾，志田の式¹¹⁾などの実験式を利用して求めることもできる．相当ひずみ速度は，

$$\dot{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} \{\dot{u}\}^{nT} [B]^T [S] [B] \{\dot{u}\}^n} \quad (9)$$

によりそれぞれの要素の任意の位置について計算できる．なおマトリックス $[S]$ は，せん断変形に関わるひずみ速度が互いに関連する共役2成分あり，さらにひずみ速度が対称であることに対応して必要となる係数であり，3次元問題については，

$$[S] = \begin{bmatrix} [E] & 0 \\ 0 & [2E] \end{bmatrix} \quad (10)$$

の通り，6行6列のマトリックスとなる．ちなみに $[E]$ は単位マトリックスである．式(9)の時間積分，すなわち積算和が相当ひずみ $\bar{\varepsilon}$ である．

2.4 速度境界条件・応力境界条件

ロール表面に沿って被圧延材は流動する．被圧延材の流動を表現するのは節点の速度であるから，節点での速度はロール表面に「沿って」いなければならない．

図3に示すとおり，ロール表面の法線方向を向いた単位ベクトルを \bar{n} ，成分を (n_x, n_y, n_z) とする．任意のベクトル \bar{a} について，その \bar{n} 方向射影は $\bar{a} \cdot \bar{n}$ で表される．法線と直交する単位ベクトル，すなわち接線ベクトルを \bar{p}, \bar{q} としこれらも互いに直交するとすれば， $\bar{n}, \bar{p}, \bar{q}$ を3つの軸とする座標系を構成することが出来る．ベクトルの成分についての座標変換は，以下の式で表される．

$$\begin{Bmatrix} a_n \\ a_p \\ a_q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \\ p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \{a\}_{npq} = [\beta]\{a\}_{xyz} \quad (11)$$

式(11)の逆を取ると， $[\beta]$ は直交マトリックスなので $[\beta]^{-1} = [\beta]^T$ ，すなわち，

$$\{a\}_{xyz} = [\beta]^T \{a\}_{npq} \quad (12)$$

が得られる．式(11)もしくは式(12)によってベクトルの成分の座標変換ができるので，ロールに沿って流れる条件は，ロール表面節点の速度の \vec{n} 軸方向成分=0として導入することができる．

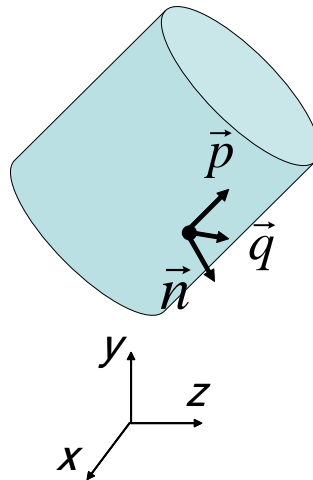


図3 ロール表面での局所座標系への変換

圧延解析における応力境界条件には，a)前後方面で与えられる張力，と，b)まさつ力がある．いずれの場合も，与えられる応力 \vec{T} を面積積分し，節点に作用する集中荷重に置き換えて導入する．クーロンまさつ条件を利用する場合には，ロールに作用する垂直応力にまさつ係数を乗じてまさつ応力を算出する．ロールに作用する垂直応力は，以下の Cauchy の式(13)によりベクトルの成分として計算できるが，さらに応力ベクトルと単位法線ベクトル \vec{n} との内積 $\vec{T} \cdot \vec{n}$ によって，その大きさが計算できる．

$$T_j = n_i \sigma_{ij} \quad (13)$$

$$\|\vec{T}\| = n_j T_j = n_i n_j \sigma_{ij} \quad (14)$$

2.5 剛性方程式

仮想仕事の原理式(5)に各式のマトリックス表示を代入すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned} & \delta \{\dot{u}\}^{nT} \int_V \frac{2\bar{\sigma}}{3\bar{\epsilon}} [B]^T [S][B] dV \cdot \{\dot{u}\}^n - \delta \{\dot{u}\}^{nT} \int_{S_f} [N]^T \{\bar{T}\} ds \\ & + \delta \{\dot{u}\}^{nT} \lambda \int_V [B]^T \{A\} dV + \delta \lambda \int_V \{A\}^T [B] dV \cdot \{\dot{u}\}^n = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

ただし $\{A\}$ は、上 3 行の値が 1.0、下 3 行の値が 0.0 となる、6 行 1 列のベクトルである。式(15)が境界条件を満足する任意の仮想速度変化 $\delta\{\dot{u}\}^n$ 、仮想ラグランジェ乗数変化 $\delta\lambda$ について満足されるためには、以下の式が常に成立している必要がある。

$$\int_V \frac{2\bar{\sigma}}{3\dot{\varepsilon}} [B]^T [S][B] dV \{\dot{u}\}^n - \int_{S_F} [N]^T \{\bar{T}\} ds + \lambda \int_V [B]^T \{A\} dV = 0 \quad (16)$$

$$\int_V \{A\}^T [B] dV \{\dot{u}\}^n = 0 \quad (17)$$

すなわち、

$$\begin{bmatrix} \int_V \frac{2\bar{\sigma}}{3\dot{\varepsilon}} [B]^T [S][B] dV & \int_V [B]^T \{A\} dV \\ \int_V \{A\}^T [B] dV & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{u}\}^n \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{S_F} [N]^T \{\bar{T}\} ds \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

である。左辺係数マトリックスの左上は要素の剛性を、右上・左下は体積一定の条件を表す。右辺は要素の外表面に作用している応力ベクトルを、節点に作用する集中荷重に置き換えたもの（節点力）である。なお、体積一定の条件は要素の中心において満足させるので、1つの要素についての剛性方程式(18)は、 25×25 のマトリックス方程式となる。式(18)は、対象とする要素の力学的特性を、「バネ」 - 「外力」系にて近似した式に相当している。

式(18)を、領域を構成する全ての要素について重ね合わせると、領域全体についての有限要素式が得られる。式(18)の重ね合わせには、「内部節点に作用している力の合計は 0」という条件を利用する¹²⁾。

また、ロール表面に存在する節点については、式(18)を領域全体に拡張すると同時に式(11)(12)を代入し、「法線方向速度=0」なる条件を満足することが出来るようにする。式(15)に表れる仮想（節点）速度変化 $\delta\{\dot{u}\}^n$ は境界条件を満足するので、このことを参考にしつつ式(18)を変換すると、剛性方程式の左辺係数行列については左から $[\beta]$ を右からは $[\beta]^T$ を、右辺列ベクトルには左より $[\beta]$ をかけることによって、境界条件を剛性方程式に導入することが出来る。

$$\begin{bmatrix} [\beta] \int_V \frac{2\bar{\sigma}}{3\dot{\varepsilon}} [B]^T [S][B] dV \cdot [\beta]^T & [\beta] \int_V [B]^T \{A\} dV \\ \int_V \{A\}^T [B] dV \cdot [\beta]^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{u}\}_{npq}^n \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [\beta] \int_{S_F} [N]^T \{\bar{T}\} ds \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

$\{\dot{u}\}_{npq}^n$ は局所座標変換後の節点速度である。ロール表面上の節点については「垂直速度成分=0」の条件を導入したいときには、式(19)の剛性方程式より該当する行・列を除外してマトリックスを縮約し、縮約されたマトリックスについて解析を行うことにより実現できる。このことにより、垂直方向節点力が未知量となるが、これは解かれた節点速度を元の剛性方程式(19)に代入することで求めることができる。

なお剛性方程式(19)はラグランジェ乗数については線形であるが、節点速度については非線形であるので繰り返し計算によって答えを求める必要がある。繰り返し計算の方法には、直接代入法・ニュートンラフソン法などがあるが、収束精度を高めるためにはニュートンラフソン法が適していると言われており、収束計算については、文献¹³⁾に詳しく記載されているのでここでは省略する。

3. 剛塑性有限要素法による圧延解析手法

1990年代以後、各種圧延プロセスへの有限要素法の適用が進んだ¹⁴⁾。板圧延についても数多くの解析例が報告されており^{15),16)}、この期間の圧延技術開発に大きく寄与した。図4は、板圧延の数値解析のフローチャートである。ロール変形、圧延機変形と被圧延材の塑性変形とを繰り返し解析し、圧延後板プロフィールが収束した時点で解析を終了する。板プロフィール解析の精度は、mmオーダーの板厚さに対して10ミクロン程度であって、率で1/100以下であり実用上は十分とされている。ただ、平坦度不良・板形状の解析にはこの精度では不十分であって、今後はより一層の精度向上、弾塑性有限要素法の適用が必要であろう。

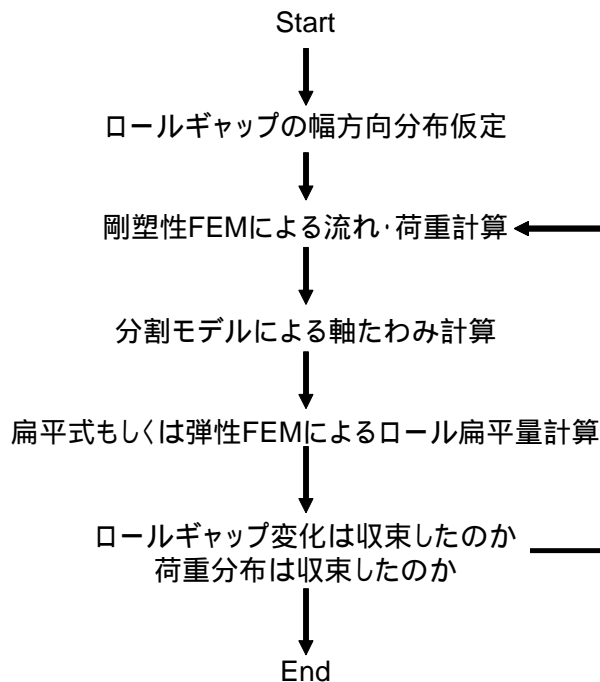


図4 フローチャート

4. まとめ

剛塑性有限要素法による板圧延の数値解析技術に関連して、基礎式と計算手法、若干の計算事例をまとめた。計算事例は筆者が関わったもののみを取り上げたが、他にも数多くの計算事例が報告されているので^{8),14)}、是非ご参照願いたく思う。

なお、本稿では剛塑性有限要素法についてのみ取り上げたが、弾塑性有限要素法の圧延解析への適用についても現在検討が進んでいる。板プロフィールについては、満足すべき精度での解析が可能となつて久しいが、形状・平坦度不良の解析について、未だ一般的な方法が確立されているとは言いがたい。弾塑性有限要素法と剛塑性有限要素法の特徴を図5にまとめて示す。一言で言えば、弾塑性有限要素法の力学的厳密さ、解析精度

の高さの前では、剛塑性有限要素法はひれ伏せざるを得ない。剛塑性有限要素法にとって重要なのは、力学的厳密さ、解析精度よりかはむしろ、実用性である。このことが1990年代の剛塑性有限要素法の隆盛を生み出した原動力であることを記して、本稿を終える。

参考文献

- 1) Karman, T: *Z. Math. Mech.*, **5**(1925), 139.
- 2) Orowan, E: *Proc. Inst. Mech. Engr.*, **150**(1943), 140.
- 3) 戸澤康壽, 石川孝司, 岩田徳利: 塑性と加工, **23-263**(1982), 1181.
- 4) 松本絃美, 中島浩衛, 菊間敏夫, 上堀雄司: 塑性と加工, **23-263**(1982), 1201.
- 5) Shohet, K.N. and Townsend, N.A.: *J.Iron.Steel Inst.*, **206-11**(1968), 1088.
- 6) Loo, T.T.: *J. Appl. Mech.*, **25-1**(1958), 122.
- 7) 中島浩衛, 松本絃美: 24回塑加連講論(1973), 29.
- 8) 山田健二, 小川 茂, 阿高松男, 菊間敏夫: 41回塑加連講論(1990), 63.
- 9) 日本塑性加工学会編: 非線形有限要素法(1994), コロナ社.
- 10) 美坂佳助, 吉本友吉: 塑性と加工, **8-79**(1967), 414-422.
- 11) 志田 茂: 塑性と加工, **10-103**(1969), 610-617.
- 12) 柳本 潤: 第56回塑性加工学講座テキスト第2章(1993), 1-32.
- 13) 柳本 潤: 生産研究, **49-9**(1997), 414-418.
- 14) 山田健二: 第169/170回西山記念講座, (1998), 53-78. 日本鉄鋼協会
- 15) 柳本 潤, 佐々木保, 木内 学, 河野輝雄: 塑性と加工, **33-383**(1992), 1406.
- 16) 柳本 潤, 木内 学, 西山泰行: 塑性と加工, **36-410**(1995), 254.

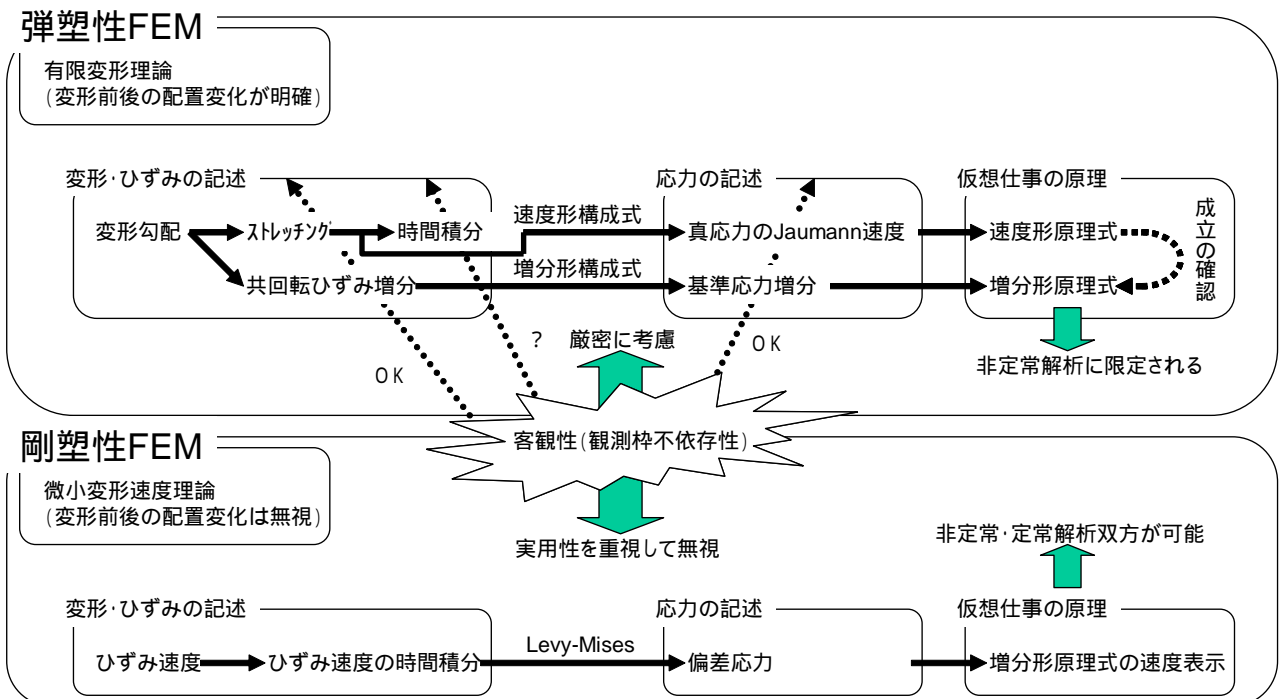


図5 弾塑性有限要素法と剛塑性有限要素法