

鍛造加工・引抜き加工の初等理論

東京大学生産技術研究所 柳本 潤

1. 塑性加工の力学解析手法の種類と用途

塑性加工技術の開発において、加工する対象である金属材料の塑性変形特性や負荷特性の解析は重要な意味を持っている。たとえば、塑性加工に利用する金型を製作する場合には、金型の内部で材料が適切に塑性変形し、必要とされる製品の形状寸法精度が得られるのかを予測しなければならない。この要求に叶う最も単純かつ明快な方法は、金型を試作し、試作した金型を利用した実験を行うことである。図1に実験を利用した金型設計の手順を示す。最初に試作した金型での塑性加工がうまくことは期待できないであろうから、実験した結果をもとに金型の不具合を修正し、再度実験を行い、また金型を修正し、といったサイクルを多数繰り返すことになる。熟練した金型設計者は、このサイクルを普通の技術者に比べて少ない回数で終わることができるであろうが、この繰り返しサイクルは時間の浪費と金型設計・開発費用の増加を必ずともなうものである。

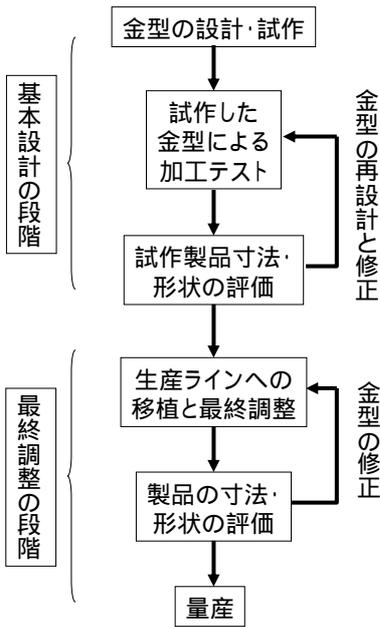


図1 塑性加工工程・金型の設計

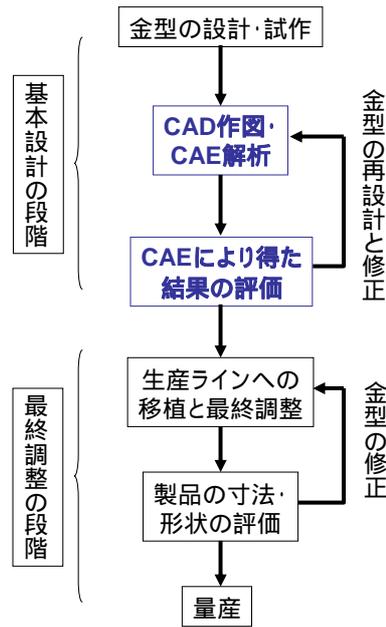


図2 CAEを利用した工程・金型の設計

21世紀に入った今日では、金型を含めた塑性加工工程全般の設計や塑性加工技術開発は、以前に増して短い時間で行うことが求められており、同時にコストも低減し、より良質な製品を市場に供給することが求められている。そのためには、たとえば先に述べた金型設計の方法も抜本的に変えざるを得ない。そのための有効なツールが、塑性加工の力学解析手法(analytical methods for metal forming)であり、現在最も進んだ力学解析手法は、有限要素法である。

塑性加工の力学解析が十分な精度によって簡単に行える場合には、金型設計の手順のうち実験の部分を、力学解析をもとにした数値実験(numerical experiment)に置き換えて、**図2**の手順で行うことも可能である。この場合、金型設計の手順は、CADシステムによる作図と塑性加工の力学解析を2つの要素としつつ、主として計算機上で行うことになる。この手順のほうが短時間で、良い金型の設計をできるはずであり、また金型設計にかかるコストも低減される。

図2に示したCAE(computer aided engineering)システムは、既に一部の塑性加工法については実用化されている。ということは、いまだにCAEシステムの利用が不可能である塑性加工法もあるということである。多数ある塑性加工のうち、CAEシステムの適用を阻んでいる最大の要因は、塑性加工の力学解析手法である。つまり、塑性加工の力学解析手法が十分に利用できる塑性加工法ではCAEシステムも適用ができ、塑性加工の力学解析手法が十分に利用できない塑性加工法では、CAEシステムの適用も進んでいない。

塑性加工の力学解析法は、塑性加工技術の開発において最も重要な要素のひとつであり、過去1世紀にわたりさまざまな研究開発が行われてきた。この間、開発されてきた塑性加工の力学解析法は、いくつかのグループに分類できる。

初等理論(elementary theory) 塑性変形している材料内部の応力分布を仮定し、材料内部に想定した微小要素またはスラブ要素(slab element)についての釣合い条件を、材料の降伏条件と連立させて解く方法である。この方法は、最も古くから塑性加工の力学解析手法として利用されてきたものであり、変形が比較的単純で応力分布の近似が容易である問題について、応力を見積もるのに適している。たとえば、板圧延、単純圧縮加工、引抜きといった問題については、2次元応力場の計算に現在でもよく利用されている。また板圧延については3次元応力解析も行われている。

エネルギー法(energy method) 塑性変形している領域について変形場もしくは応力場を仮定し、塑性変形に要するエネルギーの極限を求めることで変形場もしくは応力場を求める方法である。変位境界条件と体積一定条件を満足する変形を仮定した場合、塑性変形によって消散されるエネルギーは正解のエネルギーより必ず高くなる(上界定理: upper bound theorem)ので、できるだけエネルギーを低くする変形場を見出すことで正解に近づける。これを上界法(upper bound method)と呼ぶ。この方法によって計算されるエネルギーは正解より必ず高いので、エネルギーより計算される加工荷重も正解より高めに見積もられる。応力境界条件を満足する応力場を仮定する場合には、塑性変形によって消散されるエネルギーは正解のエネルギーより必ず低くなる(下界定理: lower bound theorem) 。これを下界法(lower bound method)と呼ぶ。これらのエネルギー法は、材料内部の応力の見積もりには向いていないので、現在ではあまり利用されなくなった。

すべり線場法(slip line theory) 平面ひずみ状態にある材料について、力の釣合い条件、

降伏条件、変位の適合条件をもとに、外力に相当して塑性変形している材料内部の応力場を求めようとする方法である。ここでいうすべり線(slip line)とは、その接線方向が最大せん断応力の方向と一致する曲線群のことで、材料内部の応力場は、塑性変形している材料内部に多数描かれたすべり線の集合によって代表される。この方法は、応力の分布状況を大雑把につかむのに向いてはいるが、適用できる問題が限られているため現在ではあまり利用されていない。

有限要素法(finite element method) 塑性変形している材料の内部を多数の要素に分割し、それぞれの要素の内部のひずみ、ひずみ速度、変位を、要素頂点(節点: Node)での変位または速度によって表すことで、まず塑性変形している材料の内部の変形場を表す。変形場はマトリックスで表示される。次に、力の釣合い条件の積分形表示である仮想仕事の原理(virtual work principle)に変形場と材料構成式、体積一定条件を代入すると、節点での変位または速度と、節点での力を、ばね定数で関係付けたマトリックス方程式が得られる。これを電子計算機によって解くことにより、変形場、応力場の解を得る。材料構成式に弾性変形成分を考慮する場合には弾塑性有限要素法(elastic-plastic finite element method)、弾性変形成分を無視する場合を剛塑性有限要素法(rigid-plastic finite element method)と呼ぶ。これらの方法によれば、複雑な塑性変形をしている加工についても解析を行うことができ、精度も高い。欠点は計算時間であるが、現在では計算機の演算速度も十分高速化されているため、数多くの塑性加工法に盛んに利用されている。図3は剛塑性有限要素法によって得られた、圧延加工の3次元解析例である。

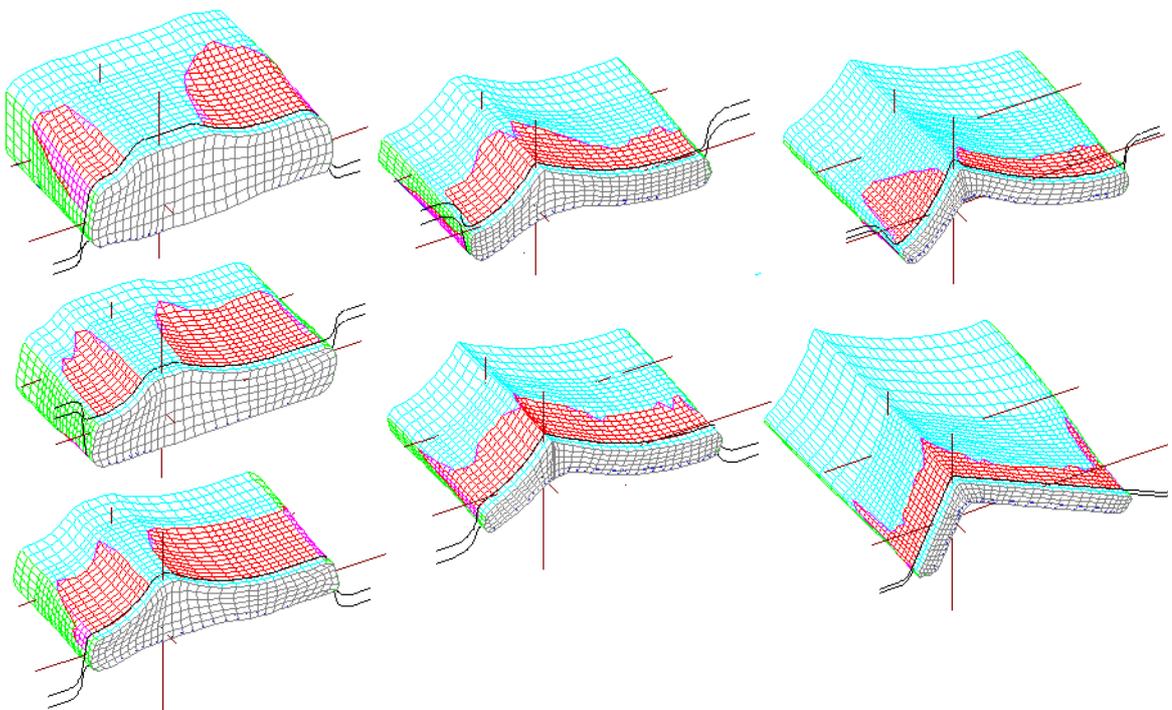


図3 圧延加工のFEM解析事例

2 . 鍛造加工を対象とした初等理論 (Elementary theory for forging)

図4に示す円柱を、平工具によって圧縮する場合を考え、必要な荷重ならびに変形を初等理論によって見積もる。円柱の初期の高さを h_0 、半径を r_0 とし、半径方向、高さ方向、周方向をそれぞれ r, z, θ とする。

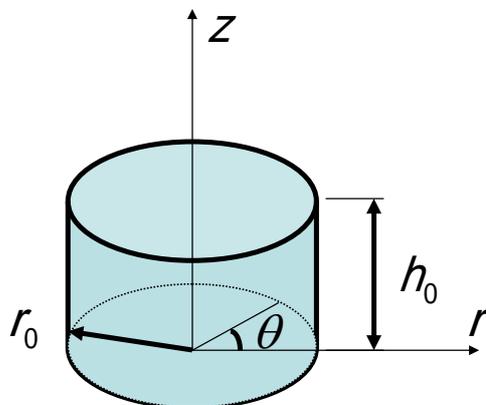


図4 円柱ビレット

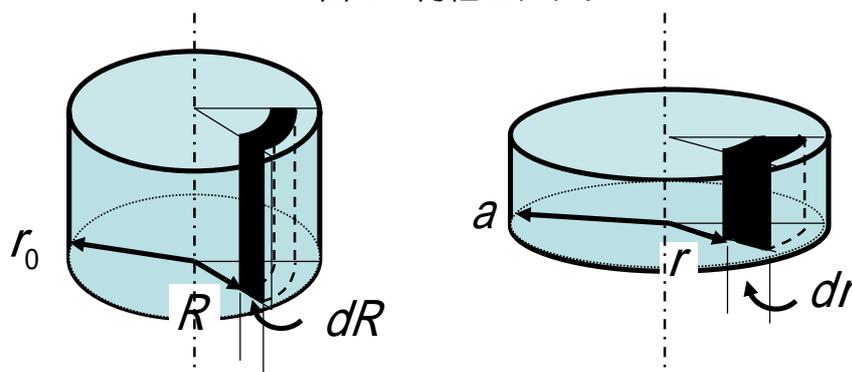


図5 変形前後の円柱ビレット

均一変形の場合のひずみ成分 変形前に半径方向位置が R であった点が、変形中のある段階において半径方向位置 r の位置にあるものとする。この時点での円柱の半径を、図5に記されている通り a と置き、微小要素の変形前後での半径方向幅をそれぞれ dR, dr とする。半径方向のひずみは、式(1)で与えられる。

$$\varepsilon_{rr} = \ln\left(\frac{dr}{dR}\right) \quad (1)$$

円周方向ひずみは、微小要素の周の長さをもとに、式(2)で計算できる。

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \ln\left(\frac{2\pi r}{2\pi R}\right) = \ln\left(\frac{r}{R}\right) \quad (2)$$

塑性変形は体積一定の条件下で起こるので、高さ方向ひずみ ε_{zz} は、式(3)を満足する。

$$\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz} = 0 \quad (3)$$

したがって、式(1)、式(2)を式(3)に代入すると、

$$\ln\left(\frac{dr}{dR}\right) + \ln\left(\frac{r}{R}\right) + \varepsilon_{zz} = 0 \quad (4)$$

この式を積分すると、

$$R^2 = r^2 \exp(\varepsilon_{zz}) + C \quad (5)$$

ここで C は積分定数である。変形の前で、円柱の中心線の位置は不変であるので、 $r = 0$ で $R = 0$ であり、積分定数 $C = 0$ となる。したがって、

$$R^2 = r^2 \exp(\varepsilon_{zz}) \quad (6)$$

$$\varepsilon_{zz} = 2 \ln\left(\frac{R}{r}\right) \quad (7)$$

この関係を、式(1)、式(2)に代入すると、半径方向ひずみ ε_{rr} と周方向ひずみ $\varepsilon_{\theta\theta}$ が、軸方向ひずみとの関係式(8)、(9)として表現できる。

$$\varepsilon_{rr} = \ln\left(\frac{dr}{dR}\right) = -\frac{1}{2} \varepsilon_{zz} \quad (8)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \ln\left(\frac{r}{R}\right) = -\frac{1}{2} \varepsilon_{zz} \quad (9)$$

応力成分と釣合い式 Hencky の方程式によれば、ひずみ成分と偏差応力テンソルとの主軸は一致している。現在考えている問題については、

$$\frac{\varepsilon_{rr}}{\sigma'_{rr}} = \frac{\varepsilon_{\theta\theta}}{\sigma'_{\theta\theta}} = \frac{\varepsilon_{zz}}{\sigma'_{zz}} = \lambda \quad (10)$$

であるので、 $\sigma'_{rr} = \sigma'_{\theta\theta}$ すなわち $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta}$ が成立している。

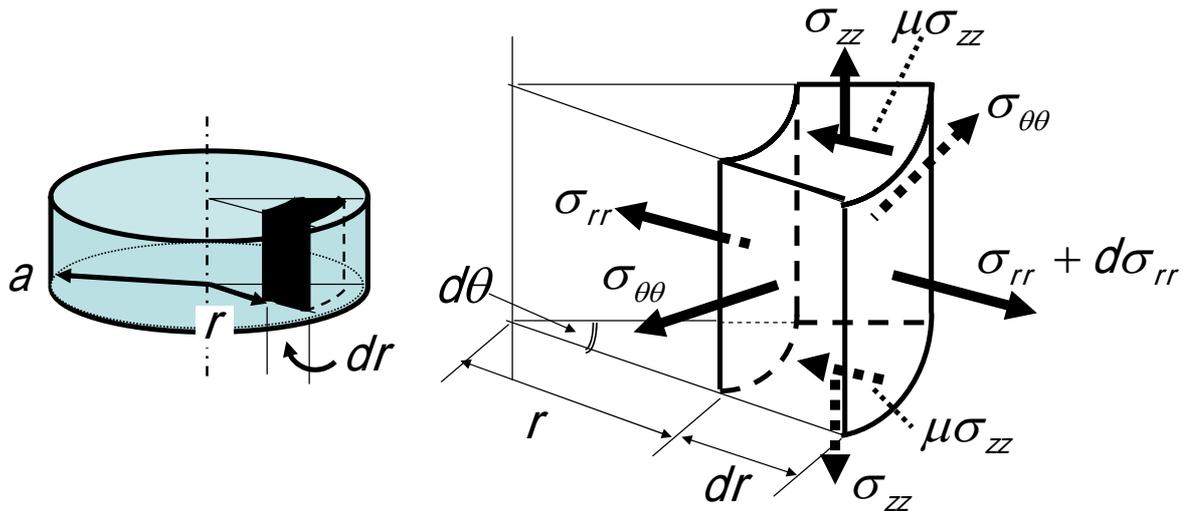


図6 微小要素についての釣合い条件

図6に示す微小要素について、半径方向の力の釣合いを考える。微小要素は、4種類、合計6つの面によって構成されている。それぞれの面に作用している半径方向力は、以下の通りである。

a)外周面： $h(\sigma_{rr} + d\sigma_{rr})(r + dr)d\theta$

b)内周面： $-h\sigma_{rr}rd\theta$

c)周方向断面（2面の合計）： $-2h\sigma_{\theta\theta}dr\left(\frac{d\theta}{2}\right)$

d)軸方向断面（2面の合計）： $2\mu\sigma_{zz}rdrd\theta$

よって、力の釣合い式は次式(11)によって表現される。

$$h(\sigma_{rr} + d\sigma_{rr})(r + dr)d\theta + 2\mu\sigma_{zz}rdrd\theta - h\sigma_{rr}rd\theta - 2h\sigma_{\theta\theta}dr\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0 \quad (11)$$

すなわち、

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{2\mu\sigma_{zz}}{h} = 0 \quad (12)$$

が、半径方向力の釣合い式である。

降伏条件と高さ方向応力の半径方向分布 降伏条件は式(13)で表される。 σ_0 は一軸降伏応力であるが、平均降伏応力をもってその値とする。 k はせん断降伏応力である。

$$\sigma_{rr} - \sigma_{zz} = \sigma_0 = 2k \quad (13)$$

つまり $d\sigma_{zz} = d\sigma_{rr}$ である。また、 $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta}$ であるので、これらの関係式を釣合い式(12)に代入すると、次式(14)が得られる。

$$\frac{d\sigma_{zz}}{dr} = -\frac{2\mu\sigma_{zz}}{h} \quad (14)$$

この式を積分し、外半径 $r = a$ で $\sigma_{rr} = 0$ すなわち $\sigma_{zz} = -\sigma_0$ という条件を用いると、高さ方向応力の半径方向分布は次式(15)によって表される。これは、円柱の圧縮加工の際に工具に作用する圧力分布を表している。

$$\sigma_{zz} = -\sigma_0 \exp\left[\frac{2\mu}{h}(a-r)\right] \quad (15)$$

図7に、式(15)によって計算される圧力分布と摩擦応力分布を示す。

(演習問題1) 圧縮の際に工具面に作用する合計力とその平均値を求めなさい。

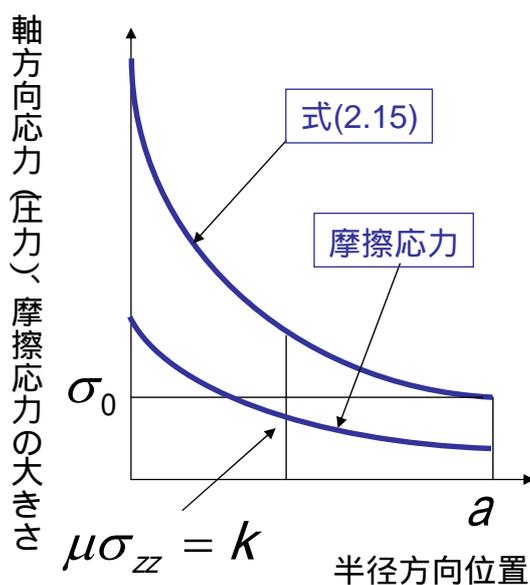


図7 円柱圧縮時の圧力分布と摩擦力分布(すべり状態)

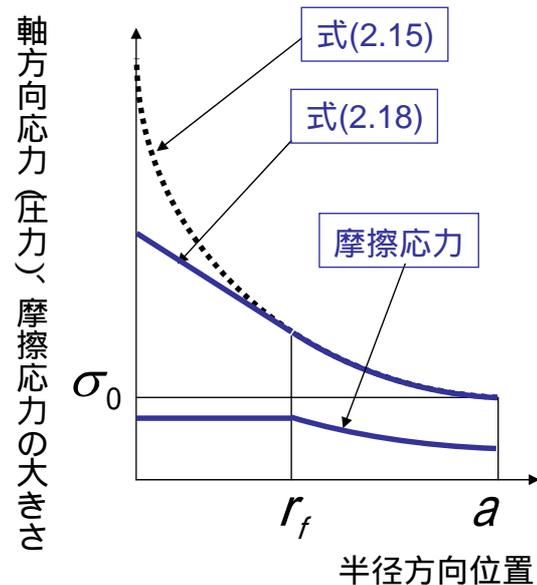


図8 円柱圧縮時の圧力分布と摩擦力分布(固着状態)

なお、式(15)はすべり状態に対する式である。仮に摩擦係数 μ が大きくなると、摩擦応力 $\mu\sigma_{rr}$ の値も高くなるがこの摩擦応力は、せん断降伏応力 k を超えることは無い。仮に、 $r = r_f$ より内周側で摩擦応力がせん断降伏応力 k を上回るとすれば、ミーゼスの降伏条件を利用することにより、

$$-\mu\sigma_z|_{r=r_f} = k = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (16)$$

であるので、これを式(15)に代入して r_f の値を求めると、次式(17)が得られる。

$$r_f = a - \frac{h}{2\mu} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}\mu}\right) \quad (17)$$

この半径 r_f より内側の領域では、摩擦力は式(16)に従う(この状態を固着状態と呼ぶが、材料と工具の間にすべりが無いということではない)。式(13)に、式(16)を代入して積分すると、固着状態についての圧力分布が得られる。

$$\sigma_z = -\left[\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}h}(r_f - r) + \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}\mu}\right] \quad (18)$$

図8に、すべり - 固着が共存する場合についての圧力分布と摩擦力分布を示す。

(演習問題2) すべりと固着が共存する場合について、圧縮の際に工具面に作用する合計力とその平均値を求めなさい。

3. 深絞り加工を対象とした初等理論 (Elementary theory for deep drawing)

図9に示されている深絞り加工について、深絞り力を初等理論によって見積もる。深絞り前の素板は円形であり、絞った後に円筒の容器が成形される。成形の際、素板の中央部分はパンチによって下方方向に移動する。そのため、素板の外周部分はパンチ、ダイス方向に引き込まれる。この外周部分をフランジと呼ぶ。フランジ部ではパンチによる引き込みの結果、板厚が増加する。またこの部分では円周方向に圧縮の応力が作用するので、フランジ部にはしばしばしわ(wrinkling)が発生する。しわの発生を抑制するために、しわ押さえ板(blank holder)が用いられる。

図10は、深絞り加工の最終段階での素板の形状である。この段階での深絞りに必要な力は、以下の3つの力の合計である。

- a) フランジ部の材料をダイス穴に絞り込むのに必要な力
- b) フランジ部とダイス肩部における材料との間の摩擦力
- c) ダイス肩部での材料の塑性変形に必要な力

これらの力を、初等理論を利用して見積もる。ただし、初等理論による深絞り加工の厳

密な解析は不可能であるので、素板の板厚変化を無視し、さらに、しわ押さえ板に作用する力は、素板の最外周に集中して作用すると考える。第1の仮定は正しい仮定とは言えず、現実には、ダイス肩部での板厚は半径方向に作用する張力によって減少し、フランジ部の板厚は深絞り加工中に増加する。フランジ部での板厚増加の割合は外周部ほど顕著になるので、しわ押さえ板と素板との接触は最外周において最も起こりやすい。このことが、第2の仮定の根拠になっている。以後の初等理論による解析では、半径方向を r 、円周方向を θ 、板厚を t とする。しわ押さえ力 Q は、図11に示されている通り、素板の最外周 r_0 に集中して作用していると考えられる。図11に、深絞り加工の解析に利用する、形状寸法記号をまとめて示す。深絞り前の素版半径を R_0 、ダイス肩部の外半径を r_1 、素板がダイスより離れる位置の半径を r_2 、ダイス肩部の半径を ρ とする。

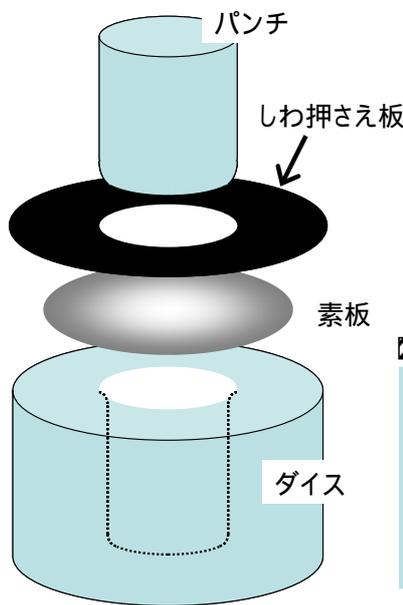


図9 深絞り加工

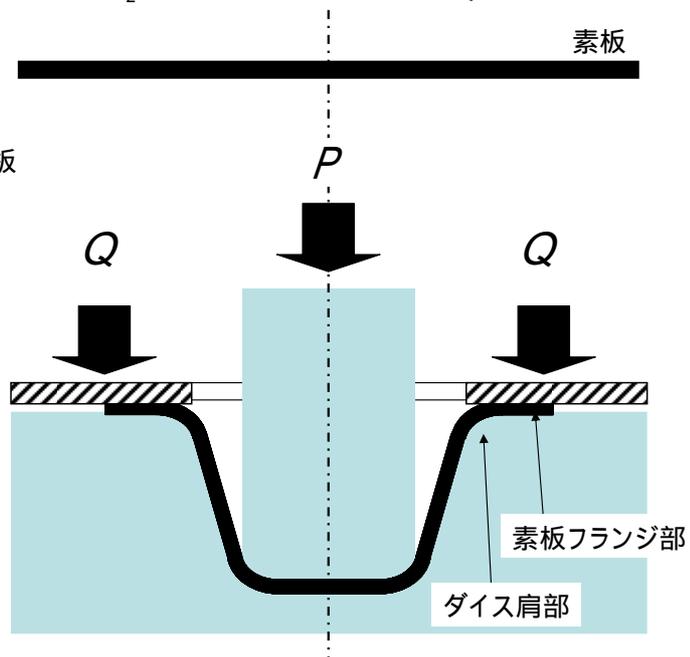


図10 深絞り加工最終段階での素板の形状

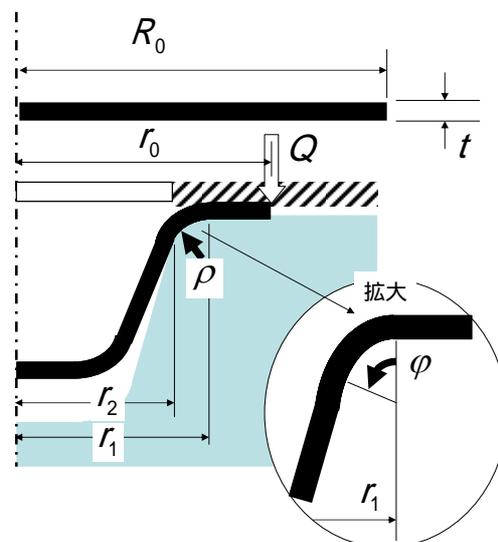


図11 素板に作用している力と記号の定義

フランジ部での力の釣合い 図12に、フランジ部分の微小要素に作用している応力成分を示す。この要素の半径方向釣合いは、鍛造加工の初等理論の釣合い式(11)と同じく、次式(19)で表される。

$$t(\sigma_{rr} + d\sigma_{rr})(r + dr)d\theta + 2\mu\sigma_{zz}rdrd\theta - t\sigma_{rr}r d\theta - 2t\sigma_{\theta\theta}dr\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0 \quad (19)$$

ただし深絞り加工の初等理論では、しわ押さえ力は最外周において集中して作用していると考えるので、式(19)中の摩擦力の項は釣合い式からは除外する。さらに高次の微小項を省略して整理すると、以下の式が得られる。

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (20)$$

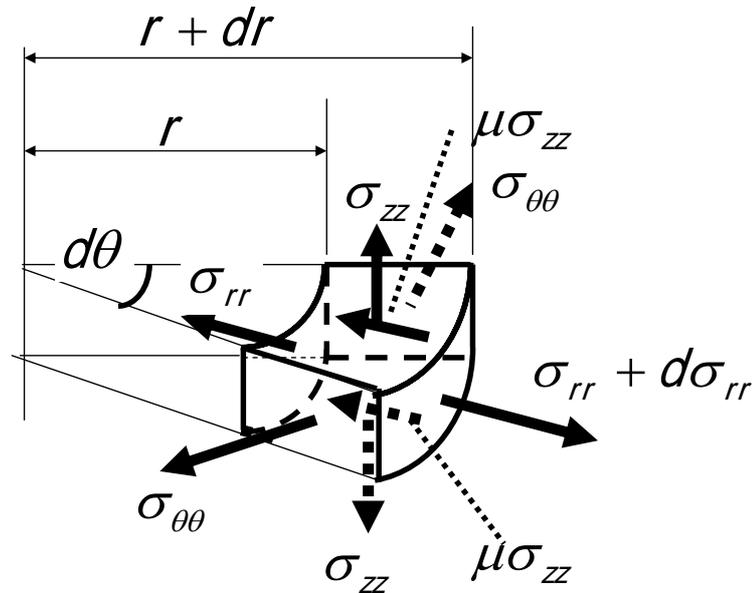


図12 微小要素についての釣合い条件

フランジ部での半径方向応力分布 降伏条件は、 $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = \sigma_0$ で表されるのでこれを式(20)に代入して積分すると、半径方向応力は、以下の式で与えられる。

$$\sigma_{rr} = C - \sigma_0 \ln r \quad (21)$$

素板最外周 r_0 での半径方向応力を仮に σ_{rr}^0 とすれば、これは最外周に集中して作用しているしわ押さえ力 Q に対応した摩擦力 $2\mu Q$ と釣合っているはずである。したがって、

$$2\pi r_0 \sigma_{rr}^0 t = 2\mu Q \quad (22)$$

である。この式より得られる σ_{rr}^0 をもとに、式(21)の積分定数を決定すると、半径方向応力分布は以下の通りに表される。

$$\sigma_{rr} = \sigma_0 \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) + \sigma_{rr}^0 = \sigma_0 \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) + \frac{\mu Q}{\pi r_0 t} \quad (23)$$

ダイス肩部での半径方向応力分布 この部分での素板半径方向の応力分布は、フランジ部と同様に素板を絞るために必要な応力と、ダイス肩部での摩擦力に分離して求める。フランジ部の半径方向応力分布より、図 1 1 に示されるフランジ肩部最外周 $r = r_1$ での半径方向応力 σ_{rr}^1 は次式(24)によって表される。

$$\sigma_{rr}^1 = \sigma_0 \ln\left(\frac{r_0}{r_1}\right) + \sigma_{rr}^0 \quad (24)$$

さてベルト摩擦の考え方(図13)によれば、ダイス肩部での角度 φ での摩擦力に応じて素板半径方向に発生する応力は、フランジ肩部最外周 $r = r_1$ での半径方向応力 σ_{rr}^1 の $\exp(\mu\varphi)$ 倍になる。また、ダイス肩部での絞り変形に必要となる半径方向応力は、前項と同じ考え方(式(23))で求めることができる。結局、ダイス肩部の半径方向位置 r (肩の角度位置 φ) で素板に作用する半径方向応力 σ_{rr} は、以下の式によって与えられる。

$$\sigma_{rr} = \exp(\mu\varphi)\sigma_{rr}^1 + \sigma_0 \ln\left(\frac{r_1}{r}\right) = \exp(\mu\varphi)\left(\sigma_0 \ln\left(\frac{r_0}{r_1}\right) + \sigma_{rr}^0\right) + \sigma_0 \ln\left(\frac{r_1}{r}\right) \quad (25)$$

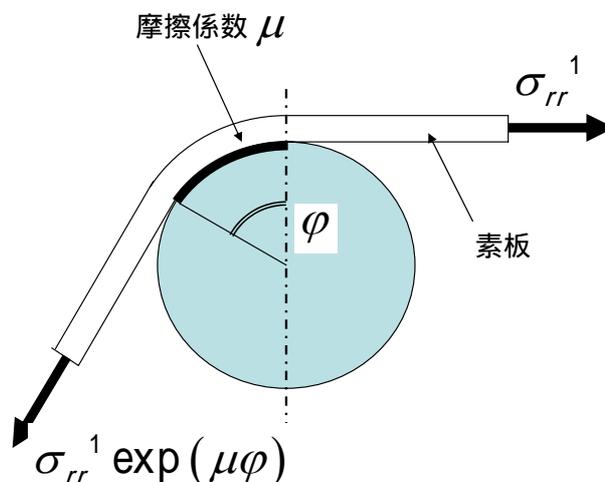


図 1 3 ベルト摩擦

ダイス肩部での曲げ・曲げ戻しによる応力の増加 素板がフランジ部を通過してダイス肩部に差し掛かると、素板は曲げ変形を受ける。この曲げ変形に必要な応力を見積もる。

図14は、断面が全て塑性変形状態にあるときの、板厚方向応力分布である。ここでは、板の変形は平面ひずみ変形を仮定し、さらに純粋な曲げ変形のみが発生する場合を考えている。板に作用している軸方向応力 σ_t の大きさは、降伏応力 σ_0 と一致しており、作用している方向は板の厚さ中心を境にして反転している。

曲げモーメント M_t を与える一般式は、

$$M_t = b \int_{-\frac{1}{2}t}^{\frac{1}{2}t} \sigma_t y' dy' \quad (26)$$

で与えられる。ただし b は板の幅（紙面垂直方向の幅）、 y' は板の厚さ中心からの距離である。この場合の応力分布を代入すると、

$$M_t = 2b\sigma_0 \int_0^{\frac{1}{2}t} y' dy' = 2b\sigma_0 \left[\frac{y'^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}t} = \frac{bt^2}{4} \sigma_0 \quad (27)$$

として、断面が全て塑性変形状態にあるときの曲げモーメントがもとめられる。

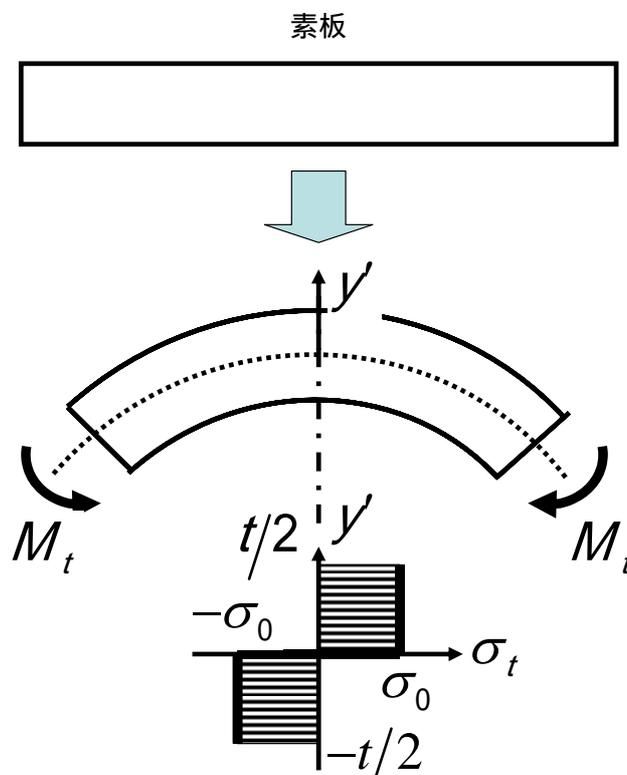


図14 全塑性状態の応力と曲げモーメント

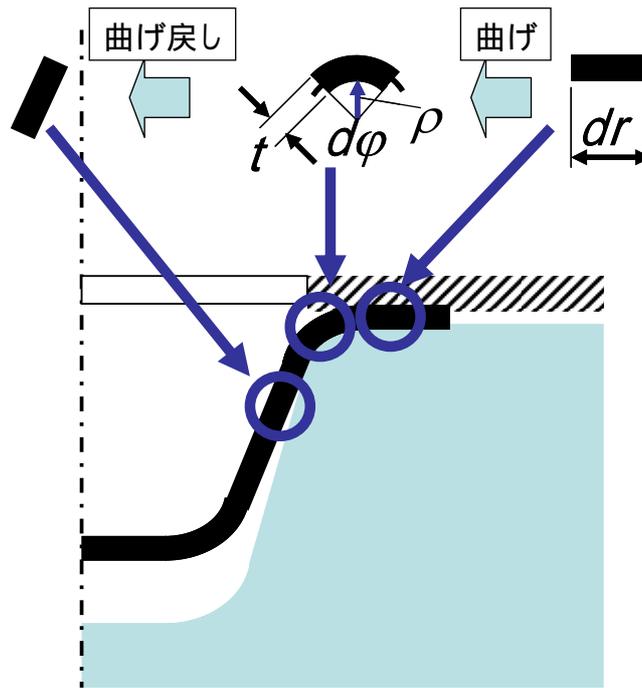


図 1 5 深絞り加工時に素板が受ける曲げ変形・曲げ戻し変形

さて現在考えている、深絞り加工のダイス肩部には、素板には半径方向に引張り応力が作用している。また、深絞り加工の半径方向応力を求めるために今まで述べてきた理論では、板の厚さ方向には半径応力 σ_{rr} が分布しないことを前提としている。さらに、式(27)は平面ひずみ変形について与えられているが、深絞り対象としているのは軸対象変形である。そこで、曲げモーメント M_t と半径方向応力 σ_{rr} との関係エネルギー法的な考え方を導入し、平面ひずみ変形との前提のもとで、以下に示すとおりに与える。**図15**はフランジ部よりダイス肩部にいたる間に素板に発生する曲げ変形である。この曲げ変形は、素板に作用している付加応力 $\sigma_{rr}^{add.}$ によって引き起こされると考えると、「素板に発生する曲げ仕事」=「素板の両端に作用する付加応力 $\sigma_{rr}^{add.}$ が素板に対してなす仕事」と考えることができる。なおこの付加応力 $\sigma_{rr}^{add.}$ は常に素板の半径方向に作用しており、ダイス肩部では、空間に固定された円柱座標系の半径方向とは作用方向が若干異なる。以下素板に固定された座標系について、素板に沿った半径方向に作用する応力について議論を進める。ダイス肩部の、ダイスと素板とが離れる位置 $r = r_2$ での角度を φ_2 (図11参照：この角度をなじみ角と呼ぶことがある)、ダイス肩部の微小角度を $d\varphi$ とし、フランジ部より半径方向長さ dr であった素版の一部が常に付加応力 $\sigma_{rr}^{add.}$ を受けつつ、ダイス肩部に沿って流れ、 $d\varphi$ の領域を占めたとする。この場合、素板になされた仕事の収支は、

$$Md\varphi = \sigma_{rr}^{add.} t dr \quad (28)$$

であり、さらに、

$$\left(\rho + \frac{1}{2}t\right)d\varphi = dr \quad (29)$$

である。なお、 ρ は既に定めてあるとおり、ダイス肩部の半径である。したがって曲げ変形に必要な付加応力 $\sigma_{rr}^{add.}$ は、

$$\sigma_{rr}^{add.} = \frac{M}{t\left(\rho + \frac{1}{2}t\right)} \quad (30)$$

と与えられる。この曲げ変形の過程において、素板の板厚方向前面に亘り塑性変形となっているので、モーメント M は式(27)で与えられるものを代入すると、

$$\sigma_{rr}^{add.} = \frac{t}{4\left(\rho + \frac{1}{2}t\right)}\sigma_0 \quad (31)$$

が成り立つ。さらに、ベルト張力の考え方にに基づき摩擦力を補正項すると、曲げ変形に必要な素板半径方向の付加応力は、次式で与えられる。

$$\sigma_{rr}^{add.} = \exp(\mu\varphi_2) \frac{t}{4\left(\rho + \frac{1}{2}t\right)}\sigma_0 \quad (32)$$

また、曲げ戻しに必要な付加応力も式(31)で与えられるとする。したがって、曲げ - 曲げ戻しに必要な付加応力の総計は、次式(33)となる。

$$\sigma_{rr}^{add.} = \frac{t}{4\left(\rho + \frac{1}{2}t\right)}\sigma_0 + \exp(\mu\varphi_2) \frac{t}{4\left(\rho + \frac{1}{2}t\right)}\sigma_0 \quad (33)$$

パンチに作用する力 式(25)、式(33)より素板がダイス肩と離れる位置 $r = r_2$ での素板半径方向応力が、付加応力を含めた形で次式にて求められる。

$$\sigma_{rr} = \exp(\mu\varphi_2) \left(\sigma_0 \ln \left(\frac{r_0}{r_1} \right) + \frac{\mu Q}{\pi r_0 t} \right) + \sigma_0 \ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right) + \frac{t}{4\left(\rho + \frac{1}{2}t\right)}\sigma_0 (1 + \exp(\mu\varphi_2)) \quad (34)$$

この応力は $r = r_2$ にて素板半径方向に作用している。この部分での断面積 $2\pi r_2 t$ に式(34) で与えられる素板半径方向応力を掛け合わせると、素板半径方向の合力が得られるがこの合力に $\sin \varphi_2$ を乗じた成分がパンチに作用する。すなわち、パンチに作用する力 P は、素板外半径 r_0 、ダイス肩部の寸法 r_1, ρ 、素板とダイスのなじみ角と半径位置 φ_2, r_2 、摩擦係数 μ 、しわ押さえ力 Q の関数として、次式で表される。

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = & 2\pi r_2 t \sin \varphi_2 \exp(\mu \varphi_2) \left(\sigma_0 \ln \left(\frac{r_0}{r_1} \right) + \frac{\mu Q}{\pi r_0 t} \right) + 2\pi r_2 t \sin \varphi_2 \sigma_0 \ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \\ & + 2\pi r_2 t \sin \varphi_2 \frac{t}{4 \left(\rho + \frac{1}{2} t \right)} \sigma_0 (1 + \exp(\mu \varphi_2)) \end{aligned} \quad (35)$$

(演習問題3) 深絞り加工条件を調べ、この場合のパンチ荷重変化を求めて、その変化を作図しなさい。

4. 引抜き加工を対象とした初等理論(Elementary theory for wire drawing)

ここでは、**図16**に示す、丸棒から丸棒への引抜き加工を対象とした、初等理論による解析と上界法による解析を比較しつつ説明する。引抜き前の素材半径を r_2 、引抜き後の素材半径を r_1 、引抜き方向座標を逆向きに z 、この位置でのダイス表面位置を r 、ダイスに作用する垂直圧縮応力を p 、摩擦係数を μ 、ダイス半角を θ とする。

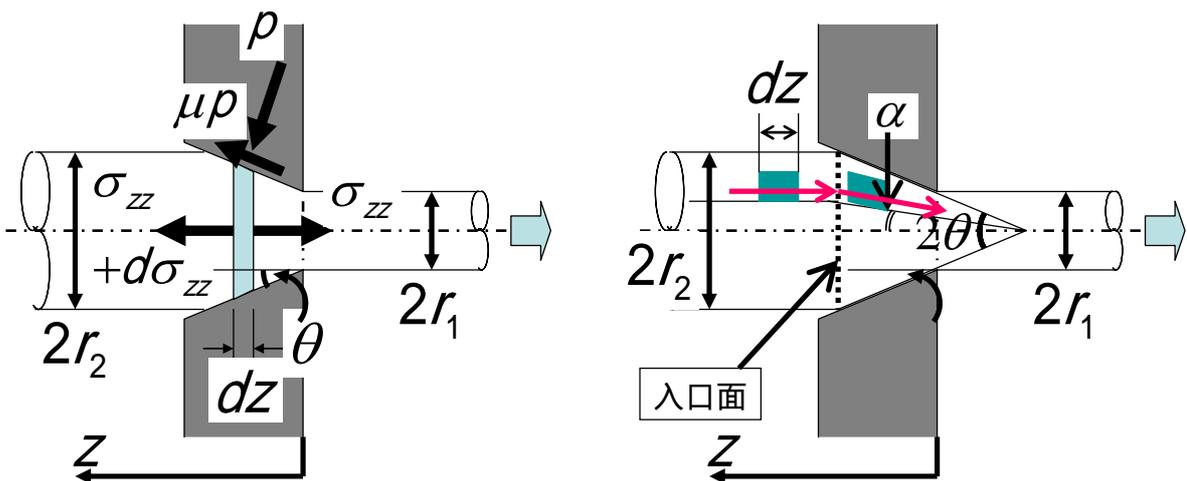


図16 丸棒の引き抜き加工と微小要素についての釣合い条件

4.1 釣合い式

$z = z$ と $z = z + dz$ で挟まれる領域のスラブ要素(**図16** 左) についての力の釣合いは式(36)で、式(36)を整理し高次の微小項を省略すると、式(37)が得られる。式(36)の左辺は

順に、入口側分割面に作用する力、出口側分割面に作用する力、ダイスより被加工材に作用する圧力（圧縮を正とする）、摩擦力を、「 $\Sigma = 0$ 」はこれらの合力が釣り合っていることを示す。

$$\pi(r+dr)^2(\sigma_{zz}+d\sigma_{zz})-\pi r^2\sigma_{zz}+2\pi r p \sin\theta \frac{dz}{\cos\theta}+2\pi r \mu p \cos\theta \frac{dz}{\cos\theta}=0 \quad (36)$$

$$\pi r^2 d\sigma_{zz}+2\pi r dr d\sigma_{zz}+2\pi r p(\mu+\tan\theta) dz=0 \quad (37)$$

$\tan\theta = dr/dz$ であるから $dz = \cot\theta dr$ であるのでこれを代入すると、釣り合い式は以下の通り整理される。

$$\pi r^2 d\sigma_{zz}+2\pi r dr[\sigma_{zz}+p(1+\mu \cot\theta)]=0 \quad (38)$$

さて、ダイス半角 θ が小さい場合には、 $\sigma_{zz}, \sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}$ を主応力と考えることができ、さらに軸対称性より $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta}$ である。ゆえに、トレスカもしくはミーゼスの降伏条件は式(39)で与えられ、さらに $\sigma_{rr} \approx -p$ と近似できる。これらを式(38)に代入して整理すると、式(40)が得られる。

$$\sigma_{zz}-\sigma_{rr}=\sigma_0 \quad (39)$$

$$\frac{2dr}{r}=\frac{dp}{\sigma_0+\beta p} \quad (40)$$

ただし、 $\beta = \mu \cot\theta$ と置いた。式(40)を積分すると、式(41)が得られる。

$$p=\frac{1}{\beta}(Cr^{2\beta}-\sigma_0) \quad (41)$$

積分定数は入口面 ($r=r_2$)での境界条件より決定される。ここで、入口面 ($r=r_2$ 、図16右)において、引抜き方向(軸方向)応力は $\sigma_{zz}=\sigma_s$ であるとする。この境界値 σ_s は、入口面において被加工材が受けるせん断変形に対応した応力である。この場合、式(39)より $p=\sigma_0-\sigma_s$ なので、積分定数 C を求めて式(41)に代入すると式(42)が得られる。

$$p=\frac{1}{\beta}\left\{\left(\frac{r}{r_2}\right)^{2\beta}\{[1+\beta]\sigma_0-\beta\sigma_s\}-\sigma_0\right\} \quad (42)$$

これを降伏条件式(39)に代入して引抜き方向(軸方向)応力を求めると式(43)が、さらに出口面 $r = r_1$ での引抜き方向応力 $\sigma_{zz}|_{r=r_1}$ は、式(44)、式(45)で与えられる。

$$\sigma_{zz} = \sigma_0 - \frac{1}{\beta} \left\{ \left(\frac{r}{r_2} \right)^{2\beta} \{ [1 + \beta] \sigma_0 - \beta \sigma_s \} - \sigma_0 \right\} = \sigma_0 \frac{1 + \beta}{\beta} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{r_2} \right)^{2\beta} \right\} + \sigma_s \left(\frac{r}{r_2} \right)^{2\beta} \quad (43)$$

$$\sigma_{zz}|_{r=r_1} = \sigma_0 \frac{1 + \beta}{\beta} \left\{ 1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^{2\beta} \right\} + \sigma_s \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^{2\beta} \quad (44)$$

$$\sigma_{zz}|_{r=r_1} = \sigma_0 \frac{1 + \beta}{\beta} \left\{ 1 - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^\beta \right\} + \sigma_s \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^\beta \quad (45)$$

ただし A_1 および A_2 はそれぞれ、出口断面積および入口断面積である。

4.2 入口面において被加工材が受けるせん断変形に対応した応力 σ_s

この応力 σ_s は、ダイス半角が大きいほど顕著である。釣合い式からは求めることが出来ないので、以下の考え方を利用する。

図 16 右にあるとおり、幅 dz の部分が入口面を通過する際に受けるせん断ひずみ γ は角度 α に比例しており、式(46)の通りに近似することができる。さらに、このせん断ひずみによってなされる仕事 W は、式(47)によって表現できる。

$$\gamma \approx \tan \alpha \cong \alpha = \left(\frac{r}{r_2} \right) \theta \quad (46)$$

$$W = \left(\int_0^{r_2} 2\pi r \cdot k \gamma dr \right) dz = k \theta \left\{ \int_0^{r_2} 2\pi r \cdot \left(\frac{r}{r_2} \right) dr \right\} dz = \frac{2}{3} k \theta \cdot A_2 dz \quad (47)$$

このせん断ひずみによってなされる仕事 W は、入口断面で σ_s のなす仕事 $\sigma_s A_2 dz$ と同じであると考えことにする。さらに、Mises の降伏条件から $k = \sigma_0 / \sqrt{3}$ であると考えことにすると、入口面において被加工材が受けるせん断変形に対応した応力 σ_s は、式(48)の通りに表される。

$$\sigma_s = \frac{2}{3\sqrt{3}} \theta \sigma_0 \quad (48)$$

入口面では、この応力の効果は既に式(42)を導出する過程で考慮されていた。さらにこれと同じせん断変形が出口面でも作用するので、その分の応力を出口面 $r = r_1$ での引抜き方向応力 $\sigma_{zz}|_{r=r_1}$ に加算すると、以下の式によって引抜き応力が表現できる。

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}|_{r=r_1} &= \sigma_0 \frac{1+\beta}{\beta} \left\{ 1 - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^\beta \right\} + \sigma_0 \left\{ \frac{2}{3\sqrt{3}} \theta \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^\beta + \frac{2}{3\sqrt{3}} \theta \right\} \\ &= \sigma_0 + \sigma_0 \left\{ \frac{1}{\mu \cot \theta} - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^{\mu \cot \theta} - \frac{1}{\mu \cot \theta} \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^{\mu \cot \theta} \right\} + \sigma_0 \frac{2}{3\sqrt{3}} \theta \left\{ \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^{\mu \cot \theta} + 1 \right\} \end{aligned} \quad (49)$$

第1項目目は引張りによる塑性変形に対応し、第2項目目は摩擦に依存し、第3項目目は入口面出口面でのせん断変形に対応している。ダイス半角の増加に伴う各項の増減について見ると、第1項目は一定、第2項目はダイス半角が増加すると減少、第3項目は増加する。したがって、引抜き応力の変化の様子は図17によって示されるとおりの挙動を示す。引抜き力はあるダイス半角において最小の値をとる。このダイス半角を、最適ダイス半角と称する。

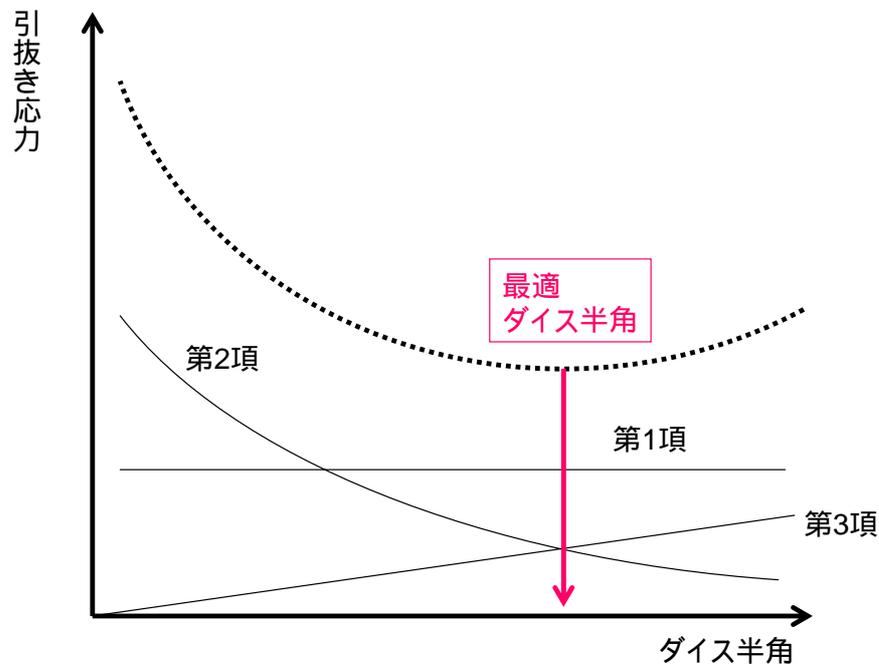


図17 引抜き応力の変化